

等参奇异裂纹单元的研究*

Isoparametric Singular Fracture Finite Element

张建民 秦 荣**
Zhang Jianmin Qin Rong

(华南理工大学建筑工程系 广东广州 510641)

(Dept. of Civil Engi., South China Univ. of Technology, Guangzhou, Guangdong, 510641, China)

摘要 探讨一维、二维直至多维奇异性等参单元完备性及可行性,并构造一组新型的高精度的含奇异性的等参裂纹单元,同时编制了程序对一典型算例进行分析。

关键词 有限元法 等参奇异裂纹单元 基函数 应力强度因子

中图法分类号 O 344.2

Abstract The feasibility and completeness of isoparametric singular fracture finite element method have been analyzed. A series of new-type and high definition isoparametric singular fracture finite element have been constructed. The accuracy of the calculation method is demonstrated by comparison with other analytical or numerical solutions available in the literature.

Key words finite element, isoparametric singular fracture finite element, basic function, stress intensity factor

目前,断裂力学研究基本上集中于二个主要方向,一个是发展对裂纹扩张现象的解释,另一个是从微观上描述材料分离的过程,这二方面都需依赖应力分析的计算方法。在线弹性范围内,用应力强度因子这个参数表征裂纹顶端附近应力场情况,取得了满意的结果。为了计算各种几何形状、受载情况下的应力强度因子,多种数值方法被采用,如边界配置法、积分方程数值解、有限元法等。

由于有限元能解决复杂几何形状,各种边界条件下的平面和空间问题以及各向异性、热应力和非线性问题,并能获得较高的精度,因而几乎已成为确定应力强度因子的最有效的方法。至今有限元计算应力强度因子主要有以下种方法:直接法、能量法、奇异函数法。

又由于裂尖处应力(和应变)的奇异性,若用常规有限元(单元函数不含奇异性)来计算,需用很密的有限元网络,且计算精度不高。为克服常规有限元法网络划分过细且不能直接求出裂纹尖端应力强度因子等缺点,70年代国内外在这方面的研究工作十分活跃,提出了很多方法,取得大量研究成果,发展较快且比较成熟的是奇异裂纹单元的应用,其中应用较

广泛的是等参奇异元。Henshell和 Barsoum各自独立发现并指出,在平面八结点等参元的基础上,只要将裂纹尖端周围等参元的边中的结点移至靠裂纹尖端 $1/4$ 分点处,就可使裂尖角点的应力具有 $1/\sqrt{r}$ 奇异性,为此提出了裂尖八结点四边形奇异性等参元及其后来退化的六结点三角形单元,但此裂尖单元未必是唯一的及最优的。

为此,本文在前人基础上,继续探讨了一维、二维直至多维奇异等参元的完备性及可行性,并在裂尖附近直接使用该单纯形基函数,同时编制程序进行验证,由计算结果表明,在采用同样单元和网络情况下,对在裂纹尖端采用不同奇异等参元计算结果与标准等参元进行了比较。

1 等参奇异裂纹单元

要使一个有限元某顶点经过等参变化后而成为应力奇异性,不失一般性,任取通过该顶点的一条边,设该边平行于 X 轴,则母单元上的一条边



相应子单元上的一条边(经过等参变化):



则该边上各点的基函数可由 Lagrange 插值公式获得:

$$p_i(X) = Cl^{(s-1)}(X) = C \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \frac{X - X_j}{X_i - X_j} = a_{0,i} + a_{1,i} X$$

2000-06-29收稿

* 广西青年科学基金资助项目(桂科青 0007007)

** 广西大学土木建筑工程学院,南宁,530004(College of Civil Engi., Guangxi Univ., Nanning, Guangxi, 530004)

$$+ a_{2,i}X^2 + \dots + a_{s-1,i}X^{s-1}, \quad (1)$$

(C为常数, S为正整数, $i = 1, 2, \dots, s$)

其中:

$$a_{0,i} = (-1)^{s-1} a_{s-1,i} \prod_{j=1, j \neq i}^s X_j,$$

$$a_{1,i} = (-1)^{s-1} a_{s-1,i} \prod_{j=1, j \neq i}^s X_j \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^s \frac{1}{X_j},$$

$$\dots \dots$$

$$a_{s-1,i} = C \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{1}{X_j - X_i}.$$

根据位移基函数的基本性质, 由 $p_i(X) = W_j$, 可定出 $C = 1$, 这里映照

$$\begin{cases} r = \sum_{i=1}^s p_i(X) r_i, \\ u = \sum_{i=1}^s p_i(X) u_i, \end{cases} \quad (2)$$

其中 r_i 为子单元上结点坐标, u_i 为子单元上结点位移, 根据弹性力学 Hooke定律, 单元应力正比于应变, 而应变值:

$$\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\sum_{i=1}^s p_i(X) u_i \right] = \sum_{i=1}^s \frac{dp_i(X)}{dr} u_i = \sum_{i=1}^s \left[\left(\frac{dr}{dX} \right)^{-1} \frac{dp_i(X)}{dX} u_i \right], \quad (3)$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{dX} \left[\sum_{i=1}^s p_i(X) r_i \right] = \sum_{i=1}^s \left[\frac{dp_i(X)}{dX} r_i \right] = \sum_{i=1}^s [a_{1,i} + 2a_{2,i}X + \dots + (s-1)a_{s-1,i}X^{s-2}] r_i, \quad (4)$$

即有

$$\frac{dp_i(X)}{dr} = \frac{[a_{1,i} + 2a_{2,i}X + \dots + (s-1)a_{s-1,i}X^{s-2}] r_i}{\sum_{i=1}^s [a_{1,i} + 2a_{2,i}X + \dots + (s-1)a_{s-1,i}X^{s-2}] r_i}, \quad (5)$$

要使单元应变具有 $1/\bar{r}$ 有奇异性, 且奇异点发生在 r_1 处, 即有形式

$$\frac{du}{dr} = \sum_{i=1}^s \frac{dp_i(X)}{dr} u_i = C_0 + C_1 \frac{1}{r - r_1},$$

(C_0, C_1 为由 u_i 待定的常数) (6)

从而有:

$$\begin{cases} a_{1,i} + 2a_{2,i}X + \dots + (s-1)a_{s-1,i}X^{s-2} = \\ \quad b_1 + b_0 \frac{1}{r - r_1}, \\ \sum_{i=1}^s [a_{1,i} + 2a_{2,i}X + \dots + (s-1)a_{s-1,i}X^{s-2}] r_i = \\ \quad b_2 \frac{1}{r - r_1}, \end{cases}$$

(b_0, b_1, b_2 为由 X_j, r_i 确定的常数) (7)

又由 $r = \sum_{i=1}^s p_i(X) r_i$ 有

$$\sum_{i=1}^s [a_{0,i} + a_{1,i}X + a_{2,i}X^2 + \dots + a_{s-1,i}X^{s-1}] r_i = r, \quad (8)$$

将(8)式代入到(7)式, 对 r 进行因次比较, 有 $s = 3$. 由(7)式, 由

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_{0,i} r_i \right) + \left(\sum_{i=1}^3 a_{1,i} r_i \right) X + \left(\sum_{i=1}^3 a_{2,i} r_i \right) X^2 = r, \quad (9)$$

解得:

$$X = \frac{- \left(\sum_{i=1}^3 a_{1,i} r_i \right) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^3 a_{1,i} r_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^3 a_{2,i} r_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 a_{0,i} r_i - r \right)}}{2 \left(\sum_{i=1}^3 a_{2,i} r_i \right)}, \quad (10)$$

将 X 值代入(7)式, 即有

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_{1,i} r_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^3 a_{0,i} r_i - r \right) \left(\sum_{i=1}^3 a_{2,i} r_i \right) = 0, \quad (11)$$

将 $a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}$ 及 s 代入(11)式, 有

$$\begin{aligned} & [(X_3^2 - X_2^2)r_1 + (X_2^2 - X_1^2)r_2 + (X_1^2 - X_3^2)r_3]^2 = \\ & 4[X_2X_3(X_3 - X_2)r_1 + X_1X_2(X_2 - X_1)r_2 + X_1X_3(X_3 - X_1)r_3 - \\ & r_1(X_3 - X_2)(X_2 - X_1)(X_3 - X_1)] [(X_3 - X_2)r_1 + (X_2 - X_1)r_2 + (X_1 - X_3)r_3], \end{aligned} \quad (12)$$

令 $K = \frac{X_3 - X_2}{X_2 - X_1}, P = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}$ 则(12)式化为 $K^2 = P$,

即当 $K^2 = P$ 时, 单元结点 1 应变具有 $1/\bar{r}$ 奇异性.

当 $K = 1/2$ 时, 则 $P = 1/4$, 即 Henshell 及 Barsoum 所述结论.

当 $P = 1 - K$ 时, 则 $K = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, P = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ 即黄金分割点.

由此任意给定一个 K 值, 即可构造出一系列的奇异性裂纹单元族, 即等参奇异裂纹单元个数并不是唯一的, 而是存在无数多个.

运用 Lagrange 插值法, 可以导出二维及三维单纯形的基函数 (具体推导从略), 其二维 三维的单纯形母单元图如图 1 图 所示.

$$\begin{cases} p_1 = (L_1 - 1 + K) \frac{L_1}{K}, \\ p_2 = (L_2 - K) \frac{L_2}{1 - K} + \left\{ \frac{1}{1 - K} - 2 \right\} L_3 L_2, \\ p_3 = (L_3 - K) \frac{L_3}{1 - K} + \left\{ \frac{1}{1 - K} - 2 \right\} L_3 L_2, \\ p_4 = \frac{1}{K(1 - K)} L_1 L_2, \\ p_5 = 4L_2 L_3, \\ p_6 = \frac{1}{K(1 - K)} L_1 L_3, \\ L_1 + L_2 + L_3 = 1, \end{cases}$$

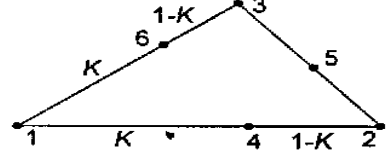


图 1 二维单纯形母单元

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (L_1 - 1 + K) \frac{L_1}{K}, \\
 p_2 &= (L_2 - K) \frac{L_2}{1-K} + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_2 L_3 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_2 L_4, \\
 p_3 &= (L_3 - K) \frac{L_3}{1-K} + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_3 L_2 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_3 L_4, \\
 p_4 &= (L_4 - K) \frac{L_4}{1-K} + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_2 L_4 \\
 &\quad + \left[\frac{1}{1-K} - 2 \right] L_3 L_4, \\
 p_5 &= \frac{1}{K(1-K)} L_1 L_2, \\
 p_6 &= 4L_2 L_3, \\
 p_7 &= \frac{1}{K(1-K)} L_1 L_3, \\
 p_8 &= \frac{1}{K(1-K)} L_1 L_4, \\
 p_9 &= 4L_2 L_4, \\
 p_{10} &= 4L_3 L_4, \\
 L_1 + L_2 + L_3 + L_4 &= 1.
 \end{aligned}$$

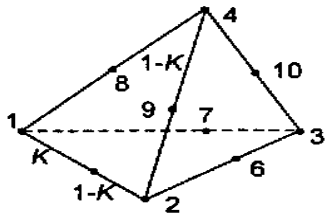


图2 三维单纯形母单元

Fig. 2 Simplex origin element of three-dimension

2 算例分析

为了更好地将上述断裂力学计算理论应用到工程实践中去,我们编制一套适用于二维实体结构裂纹分析的专用计算程序 PAFEP, 主要用于结构裂纹的应力强度因子的计算,可在裂尖附近直接使用上面推导的二维单纯形奇异裂纹单元或 Barsoum 及 Henshell 所述的裂尖单元,而在其他部位使用一般的平面八结点等参单元,该程序共计 1 600 多个 Fortran 语句, 30 多个子程序,网络划分采用全自动网络生成,数据准备极其方便.同时为克服微机内存对大型结构物计算的限制及要求,程序采用了覆盖及内外存交换等计算机技巧,使用波前法来求解线性方程组,从计算结果直接可得到各单元结点的应力变化值及裂纹的应力强度因子.

如图 3 所示为一无限长,宽为 10 cm 的平板,其左侧有一长度为 3 cm 的贯穿裂纹,其上受有 10 N/cm² 的均布荷载,弹性模量为 $K \times 10^5$ N/cm²,泊松比为 0.25,由于结构对称,只取结构的一半来进行分析,

共划分为 4 个平面八结点等参数单元, 5 个二维单纯形等参裂纹单元, 共计 16 个结点, 单元网络划分图如图 3 所示.

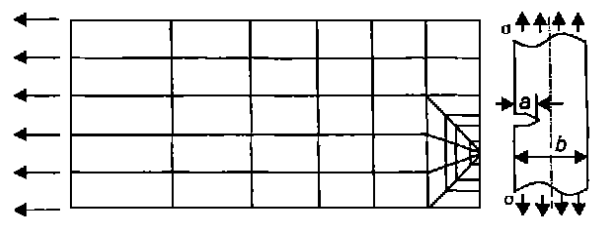


图3 单元网络划分

Fig. 3 Partition of simplex origin

其 I 型裂尖应力强度因子的理论值由文献 [1] 给出, 即

$$\begin{aligned}
 K_{I1} &= F \cdot e^{-c_a}, \\
 F &= 1.12 - 0.23 \left[\frac{a}{b} \right] + 10.55 \left[\frac{a}{b} \right]^2 - \\
 &\quad 21.72 \left[\frac{a}{b} \right]^3 + 30.39 \left[\frac{a}{b} \right]^4.
 \end{aligned}$$

在不改变网络划分和不增加单元的情况下,对二维单纯形裂尖附近等参奇异单元进行计算.当 K 及 P 取不同值时 ($K^2 = P$),表 1 给出了计算所得裂尖 I 型应力强度因子的值,并与理论值进行了对照.

表 1 计算值与理论值

Table 1 Calculated and theoretical values

K	P	K_{I1}	K	P	K_{I1}
0.1	0.01	49.164	0.7	0.49	49.966
0.2	0.04	50.091	0.8	0.64	50.073
0.3	0.09	50.012	0.9	0.81	49.710
0.4	0.16	50.016	0.618034	0.381966	50.007
0.5	0.25	50.039			
0.6	0.36	49.984			50.000*

* 理论值 Theoretical value

由上可见, 所得计算结果与理论值都相当接近, 这就验证了前面所推导的系列等参奇异裂纹单元均能满足要求.令人惊讶的是,且当分割点处在黄金分割点处时,在相同网络划分和不增加单元的情况下,计算结果精度最高,这一现象有必要值得进一步深入研究.

参考文献

- 高庆. 工程断裂力学. 重庆: 重庆大学出版社, 1986.
- 张建民. 工程结构故障检测中的若干问题. 成都科技大学固体力学研究生毕业论文, 1993.
- 于建华, 张建民. 建筑物基底隔震座的力学特性及隔震建筑物地震响应研究. 四川省振动工程学会第二次学术研讨会论文集, 1991.

(责任编辑: 黎贞崇)