DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (1): 4～6

关于 ρ 混合序列的收敛性质*

Convergence Properties for ρ-Mixing Random Sequences

吴群英

Wu Qunying

(桂林工学院基础部 桂林市建干路 12号 541004)

(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 给出了关于 ρ 混合序列完全收敛的等价条件，所得结论推广和改进了文献 [1, 2, 4, 5]的部分结论，并达到了独立同分布完全一样的理想结果。

关键词 ρ 混合 完全收敛 矩条件

中图法分类号 O 211.4

Abstract The sufficient and necessany condition of the complete convergence for ρ-mixing sequence is discussed. The results improve and extend the results of References [1, 2, 4, 5].

Key words ρ-mixing, complete convergence, moment condition

1 引理

设 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为一随机变量序列，记 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$，在独立同分布情形，$S_n$ 的收敛性已是相当完善，例如完全收敛性有 Baum和 Katz在文献 [1]中的著名定理:

定理 A 设 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为独立同分布序列，$\alpha > 1/2$，$\alpha p > 1$，且当 $\alpha \leqslant 1$ 时，进一步假设 $EX_1 = 0$ 则

$$E|X_1|^p < \infty, \tag{1}$$

等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{j \leqslant n} |S_j| \geqslant \varepsilon n^{\alpha}) < \infty, \forall \varepsilon > 0. \tag{2}$$

对于 φ 混合序列，王定成[2]和邵启满[3]进行了讨论，得到了类似于 (1) 与 (2) 之间的等价关系，对于比 φ 混合更为广泛的 ρ 混合序列，孔繁超[4]、邵启满[5]在一定的混合速度下，讨论了 S_n 完全收敛的充分性，但未得到必要条件。

本文讨论了 ρ 混合序列的收敛性，在不需要对混合速度要求的情况下，建立了 (1) 与 (2) 之间的等价关系，获得了与独立同分布完全一样的理想结果。这些结果推广和改进了文献 [1]、[2]、[4]、[5]的部分结果。

设 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为一随机变量序列，本文记 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$，$F_1^k \triangleq \sigma(X_i, i \leqslant k)$，$F_{k+n}^{\infty} \triangleq \sigma(X_i, i \geqslant k+n)$，$L_p(\mathscr{A})$ 为所有 $\mathscr{A}$ 可测且 p 阶矩有限的随机变量全体，$\|X\|_p \triangleq (E|X|^p)^{1/p}$，一律以 c 记与 n 无关的正常数，不同之处可取不同的值，“$\ll$”表示通常的大“O”，“I_A”表示集合 A 上的示性函数，“[ ]”表示取整，$\log x$、$\ln x$ 分别表示以 2和 e为底的对数。

定义

$$\rho(n) \triangleq \sup_{k \in N} \sup_{X \in L_2(F_1^k), Y \in L_2(F_{k+n}^{\infty})} \frac{|E(X-EX)(Y-EY)|}{\sqrt{VarX\,VarY}}.$$

如 $\rho(n) \to 0, n \to \infty$，则称序列 $\{X_i, i \geq 1\}$ 为 ρ 混合的。

为了证明本文结论，需下引理:

引理 1[5] 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列，$EX_i = 0$，$\|X_i\|_q < \infty$，$q \geqslant 2$，则存在仅依赖于 q 与 $\rho(\cdot)$ 的常数 c，使得 $\forall n \geqslant 1$，均有

$$E|S_n|^q \ll n^{q/2} \exp\Big(c \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho(2^i)\Big) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|X_i\|_2^q + n \exp\Big(c \sum_{i=0}^{[\log n]} \rho^{2/q}(2^i)\Big) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|X_i\|_q^q.$$

引理 2 设 $r \geqslant 1$ 为任一给定常数，若对任何 $m \leqslant n$ 有 $E|S_m|^r \leqslant m\lambda^r(m)$，其中 $\{\lambda(n), n \geqslant 1\}$ 为一单调非降序列，则有

$$E(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j|^r) \leqslant c \cdot n \cdot \Big(\sum_{i=0}^{[\log n]} \lambda([m/2^{i+1}])\Big)^r.$$

证明 见文献 [6]中定理 5.

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 是 ρ 混合同分布序列，$\alpha p > 1$，$p < 2$，且当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$EX_1 = 0$ 则

$$E|X_1|^p < \infty, \tag{3}$$

2000-05-31收稿，2000-09-28修回。
* 广西自然科学基金资助项目 (桂科青 9912008)。

等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \geqslant \varepsilon n^{\alpha}) < \infty, \forall\ \varepsilon > 0.$ (4)

证明　先证明(3)式蕴涵(4)式,记 $Y_i \triangleq X_i I(|X_i| \leqslant n^{\alpha})$. 先证

$$n^{-\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum_{i=1}^{j} EY_i| \to 0, n\to\infty. \quad (5)$$

i) 当 $\alpha \leqslant 1$,因 $\alpha p > 1$,由 $EX_1 = 0$ 及(3)式得

$$n^{-\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum_{i=1}^{j} EY_i| \leqslant n^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} |EY_i| =$$

$$n^{1-\alpha} |EX_1 I(|X_1| > n^{\alpha})| \leqslant n^{1-\alpha} E|X_1| \frac{|X_1|^{p-1}}{n^{\alpha(p-1)}} I(|X_1| > n^{\alpha}) \ll n^{1-\alpha p} \to 0, n\to\infty.$$

ii) 当 $\alpha > 1$ 时,

$$n^{-\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum_{i=1}^{j} EY_i| \leqslant n^{1-\alpha} E|X_1| I(|X_1| \leqslant n^{\alpha}) \ll \begin{cases} n^{1-\alpha}, & p \geqslant 1, \\ n^{1-\alpha p}, & p < 1, \end{cases}$$

故(5)式成立,即有 $\forall\ \varepsilon > 0$,当 n 充分大时有

$$P(|\max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{j} EY_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} n^{\alpha}) = 0. \quad (6)$$

又 $\{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \geqslant \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum\limits_{i=1}^{j} Y_i| \geqslant \varepsilon n^{\alpha}\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{|X_i| > n^{\alpha}\} \cup \{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum\limits_{i=1}^{j} (Y_i - EY_i)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} n^{\alpha}\} \cup \{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\sum\limits_{i=1}^{j} EY_i| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} n^{\alpha}\} \triangleq A_n \cup B_n \cup C_n.$ (7)

由(6)、(7)式,$\forall\ \varepsilon > 0$,当 n 充分大时有

$$P\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \geqslant \varepsilon n^{\alpha}\} \leqslant P(A_n) + P(B_n). \quad (8)$$

故为证(4)式,只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(A_n) < \infty, \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(B_n) < \infty. \quad (10)$$

先证明(9)式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} P(|X_1| > n^{\alpha}) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} \sum_{j=n}^{\infty} P(j^{\alpha} < |X_1| \leqslant (j+1)^{\alpha}) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{j} n^{\alpha p-1} P(j^{\alpha} < |X_1| \leqslant (j+1)^{\alpha}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p} P(j^{\alpha} < |X_1| \leqslant (j+1)^{\alpha}) \ll E|X_1|^{p} < \infty.$$

再证(10)式. 记

$$\tilde{Y}_i \triangleq Y_i - EY_i, \tilde{S}_j \triangleq \sum_{i=1}^{j} \tilde{Y}_i.$$

取 $q > 2 > p$, $0 < \delta < \min((\alpha p - 1)(q/2 - 1), \alpha(q - p))$,我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(B_n) \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha q} E(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |\tilde{S}_j|)^{q}. \quad (11)$$

由引理1及 C_r 不等式有

$$E|\tilde{S}_m|^{q} \ll m^{q/2} \exp(c\sum_{i=0}^{[\log m]} d(2^{i})) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\tilde{Y}_i\|_2^{q} + m\exp(c\sum_{i=0}^{[\log m]} d^{2/q}(2^{i})) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\tilde{Y}_i\|_q^{q},$$

因 $d(2^{i}) \to 0, d^{2/q}(2^{i}) \to 0, i\to\infty$.
故 $\exists N_0$,当 $i \geqslant N_0$,有

$$d(2^{i}) < \frac{\delta}{c}\ln 2, d^{2/q}(2^{i}) < \frac{\delta}{c}\ln 2.$$

由此可得

$$\exp(c\sum_{i=0}^{[\log m]} d(2^{i})) = \exp(c\sum_{i=0}^{N_0} d(2^{i}) + c\sum_{i=N_0+1}^{[\log m]} d(2^{i})) \ll \exp(c\sum_{i=N_0+1}^{[\log m]} \frac{\delta \ln 2}{c}) \leqslant m^{\delta}.$$

同理可得

$$\exp(c\sum_{i=0}^{[\log m]} d^{2/q}(2^{i})) \ll m^{\delta}.$$

故 $E|\tilde{S}_m|^{q} \ll m^{q/2+\delta} \|Y_1\|_2^{q} + m^{\delta+1} \|Y_1\|_q^{q} \leqslant m(m^{1/2+(\delta-1)/q} \|Y_1\|_2 + m^{\delta/q} \|Y_1\|_q)^{q} \triangleq m\lambda^{q}(m)$,

由引理2,注意到

$$\lambda(n) = n^{1/2+(\delta-1)/q} \|Y_1\|_2 + n^{\delta/q} \|Y_1\|_q$$

及 C_r 不等式得

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |\tilde{S}_j|)^{q} \ll n\{\sum_{i=0}^{[\log n]} \lambda([\frac{n}{2^{i+1}}])\}^{q} =$$

$$n\{\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{n}{2^{i+1}})^{1/2+(\delta-1)/q} \|Y_1\|_2 + \sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{n}{2^{i+1}})^{\delta/q} \|Y_1\|_q\}^{q}$$

$$\ll n\{(\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{n}{2^{i+1}})^{1/2+(\delta-1)/q} \|Y_1\|_2)^{q} + (\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{n}{2^{i+1}})^{\delta/q} \|Y_1\|_q)^{q}\} =$$

$$n\{n^{q/2+\delta-1} \|Y_1\|_2^{q} (\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{i+1}})^{1/2+(\delta-1)/q})^{q} + n^{\delta} \|Y_1\|_q^{q} (\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{i+1}})^{\delta/q})^{q}\},$$

注意到 δ、q 的取法有

$$\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{i+1}})^{1/2+(\delta-1)/q} = \sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{1/2+(\delta-1)/q}})^{i+1} < \infty,$$

$$\sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{i+1}})^{\delta/q} = \sum_{i=0}^{[\log n]} (\frac{1}{2^{\delta/q}})^{i+1} < \infty,$$

故

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |\tilde{S}_j|)^{q} \ll n^{q/2+\delta} \|Y_1\|_2^{q} + n^{\delta+1} \|Y_1\|_q^{q} \ll n^{q/2-\alpha q(2-p)/2+\delta} + n^{\delta+1} E|X_1|^{q} I(|X_1| \leqslant n^{\alpha}). \quad (12)$$

由(11)、(12)式,只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha p+q/2-q\alpha(2-p)/2+\delta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2+q(1-\alpha p)/2+\delta} < \infty, \quad (13)$$

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1-\alpha p+\delta} E|X_1|^{q} I(|X_1| \leqslant n^{\alpha}) < \infty.$ (14)

由于 $\alpha p - 2 + q(1-\alpha p)/2 + \delta < -1$,得(13)式成立.

下证(14)式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1-\alpha q+\delta} E|X_1|^{q} I(|X_1| \leqslant n^{\alpha}) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1+\delta} \sum_{j=1}^{\infty} E|X_1|^{q} I((j-1)^{\alpha} < |X_1| \leqslant j^{\alpha}) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha q-1+\delta} E|X_1|^{q} I((j-1)^{\alpha} < |X_1| \leqslant j^{\alpha}) \ll$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p-\alpha q+\delta} E|X_1|^q I((j-1)^\alpha < |X_1| \le j^\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{\alpha p-\alpha q+\delta} E|X_1|^p |X_1|^{q-p} I((j-1)^\alpha < |X_1| \le j^\alpha) \le \sum_{j=1}^{\infty} E|X_1|^p I((j-1)^\alpha < |X_1| \le j^\alpha) = E|X_1|^p < \infty .$$

故(4)成立.

再证(4)⇒(3),

因 $X_j = S_j - S_{j-1}$,所以

$$\max_{j\le n}|X_j| \le 2\max_{j\le n}|S_j| ,$$

故由(4)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) < \infty . \qquad (15)$$

下先证:

$$(15) \Rightarrow P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) \to 0, n\to\infty . \qquad (16)$$

反证,如不然,则 $\exists \varepsilon_0 > 0$,自然数子列 n_j,及 $\delta_0 > 0$,使 $P(\max_{1\le j\le n_j}|X_j| \ge \varepsilon_0 2^\alpha n_j^\alpha) > \delta_0$.

不妨设 $n_{j+1} \ge 2n_j$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon_0 n^\alpha) \ge \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n_j\le n\le 2n_j} n_j^{\alpha p-2} P(\max_{1\le j\le n_j}|X_j| \ge \varepsilon_0 2^\alpha n_j^\alpha) \ge \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{\alpha p-1}\delta_0 = \infty .$$

与(15)矛盾,故(16)成立.

下证当 n 充分大时,

$$P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) \gg nP(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha). \qquad (17)$$

对某个 $u > 1$,由 $\tilde\rho^{2/u}(n) \to 0, n\to\infty$ 及(16)式,

$\exists N$,当 $n,r > N$ 时,有

$$P(\max_{i\le n}|X_i| \ge \varepsilon n^\alpha) > 1/2, \tilde\rho^{2/u}(r) < 1/6.$$

故当 n 充分大时,取正整数 r,$N \le r \le n$,有

$$P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) \ge P\{\bigcup_{j=1}^{[n/r]} |X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha\} = P(\exists j, 1\le j\le [\frac{n}{r}] \text{使} \max_{i\le j}|X_{ir}| < \varepsilon n^\alpha, |X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha) = \sum_{j=1}^{[n/r]} P(\max_{i\le j}|X_{ir}| \ge \varepsilon n^\alpha, |X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha). \qquad (18)$$

令

$$A \triangleq \max_{i<j}(|X_{ir}| < \varepsilon n^\alpha), B \triangleq (|X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha), X \triangleq I_{\bar A}, Y \triangleq I_B .$$

在文献[7]的引理1.2.7,取 $1 < v < u, \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$,有 $EXY \le EXEY + 4\tilde\rho^{\frac{2}{u}-\frac{2}{v}}((j-i)r)\|X\|_u\|Y\|_v$,即得

$$P(\bar A B) \le P(\bar A)P(B) + 4\tilde\rho^{2/u}(r)P^{1/u}(\bar A)P^{1/v}(B).$$

$$P(AB) = P(B) - P(\bar A B) \ge P(B) - (P(\bar A)P(B) + 4\tilde\rho^{2/u}(r)P^{1/u}(\bar A)P^{1/v}(B)) \ge P(A)P(B) - \frac{1}{4}P^{1/u}(\bar A)P^{1/v}(B),$$

故由(18)得

$$P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) \ge \sum_{j=1}^{[n/r]}\{P(\max_{i<j}|X_{ir}| < \varepsilon n^\alpha)P(|X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha) - \frac{1}{4}(P(\max_{i<j}|X_{ir}| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/u}(P(|X_{jr}| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/v}\} \ge \sum_{j=1}^{[n/r]}\{P(\max_{i\le n}|X_i| < \varepsilon n^\alpha)P(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha) - \frac{1}{4}(P(\max_{i\le n}|X_i| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/u}(P(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/v}\} = [\frac{n}{r}]P(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha)\{P(\max_{i\le n}|X_i| < \varepsilon n^\alpha) - \frac{1}{4}(P(\max_{i\le n}|X_i| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/u}(P(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/v-1}\} \gg nP(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(P(|X_i| \ge \varepsilon n^\alpha))^{1/v-1}).$$

令 $v \to 1$,即得(17)式,再由(15)式得

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2}P(\max_{1\le j\le n}|X_j| \ge \varepsilon n^\alpha) \gg \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1}P(|X_1| \ge \varepsilon n^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1}\sum_{j=n}^{\infty}P(\varepsilon j^\alpha \le |X_1| < \varepsilon(j+1)^\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j} n^{\alpha p-1}P(\varepsilon j^\alpha \le |X_1| < \varepsilon(j+1)^\alpha) \gg \sum_{j=n}^{\infty} j^{\alpha p}P(\varepsilon j^\alpha \le |X_1| < \varepsilon(j+1)^\alpha) \gg E|X_1|^p .$$

故定理1成立.

由定理1的证明过程知对于不同分布列,仍有相应的结论:

定理2 设 $\{X_i, i\ge 1\}$ 是 $\tilde\rho$ 混合序列,$\alpha p > 1$,$p < 2$,当 $\alpha \le 1$ 时,$EX_i = 0$,且存在随机变量 X_0,使当 $x \to \infty$ 时,有

$$P(|X_0| > x) \ll \inf_i P(|X_i| > x) \le \sup_i P(|X_i| > x) \ll P(|X_0| > x),$$

则 $E|X_0|^p < \infty$ 等价于(4)式.

参考文献

1 Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. Trans Amer Math Soc, 1965, 120, 108~123.

2 王定成. Φ-mixing平稳序列和的完全收敛性. 系统科学与数学, 1987, 7, 352~359.

3 邵启满. 一矩不等式及其应用. 数学学报, 1998, 31, 736~747.

4 孔繁超,张明俊. 关于ρ混合序列的完全收敛性的注记. 科学通报, 1994, 9, 778~781.

5 邵启满. 关于ρ混合序列的完全收敛性. 数学学报, 1989, 32, 377~393.

6 Moricz F, Serfling R S, Stout W. Moment and probability bounds with quasisumdditive structure for the maximum of partial sum. Ann Probab, 1982, 10, 1032~1040.

7 陆传赉,林正炎. 混合相依变量的极限理论. 北京: 科学出版社, 1997.

(责任编辑: 黎贞崇)