DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (1): 13~14

# 核空间的对偶空间值随机微分方程组解的收敛性

# Convergence of Solution of Stochastic Differential Equation in Dual of Nuclear Space

宣士斌
Xuan Shibin

(广西民族学院现代教育技术中心 南宁市西乡塘 530006)
(Modern Education Technology Centre, Guangxi University for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 研究核空间的对偶空间的随机微分方程解的性质,得到微分方程组解 $L^2$收敛的条件,及在一定条件下解过程导出的测度 $\{P^n\}$ 为胎紧。

关键词 核空间 收敛 胎紧
中图法分类号 O 241.8

**Abstract** Character of solution of stochastic differential equation in dual of nuclear space was studied. $L^2$-convergence condition of solution of differential equation group was obtained, and measure $\{P^n\}$ educed by solution process was tight under some condition.

**Key words** nuclear space, $L^2$-convergence, tight

由于核空间的对偶空间的广泛性,其微分方程有广阔的应用前景,为此文献 [1]中建立了核空间的对偶空间的随机微分方程,并讨论了微方程解的存在唯一性。本文利用文献 [2]中建立的 Itô分式,讨论了随机微分方程组的解的胎紧性,设 $(\Phi, \mathrm{f})$ 是核空间,$q_s^{(n)}, q_s, s \in R_+$ 是$\Phi$ 上的连续 $H$-半范,$W^{(n)}$ 是一列$\Phi'$-值广义 Wiener过程,且 $q_s^{(n)} < q_s, s \in [0, T]$,考虑下列方程组:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{(n)} = \mathrm{T}_n(X_t^{(n)}, t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}(X_t^{(n)}, t)\, i_{q_t^{(n)}} q_t \mathrm{d}W_t^{(n)}, \\ X_0^{(n)} = x^{(n)}, t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x^{(n)} \in \mathrm{J}_u'$, $n = 1, 2, \cdots$,

$\mathrm{T}_n(x, t)$: $\mathrm{J}_u' \times [0, T] \mapsto \mathrm{J}_u'$,可测映射.

$\mathrm{T}(x, t)$ 满足文献 [1]中 (1) 式中的条件和微分方程 [1]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mathrm{T}(X_t, t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{T}(X_t, t)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x, t \in [0, T] \end{cases} \quad (2)$$

则有如下命题:

命题 **1** 假设下列条件成立

$$(\mathrm{i}) \begin{cases} u'(\mathrm{T}_n(x, t) - \mathrm{T}_n(y, t)) \leqslant Lu'(x - y), \\ |\mathrm{e}(x, t) - \mathrm{e}(y, t)|_{q_t u} \leqslant Lu'(x - y), \end{cases}$$

$\forall x, y \in \mathrm{J}_u', \forall t \in [0, T]$,

$u'(\mathrm{T}_n(x, t)) \leqslant c(1 + u'(x)), |\mathrm{e}(x, t)|_{q_t u} \leqslant c(1 + u'(x))$, $\forall x \in \mathrm{J}_u', \forall t \in [0, T]$,

(ii) $x^{(n)} \xrightarrow{L^2(\mathrm{K})} x$;

(iii) $\mathrm{T}_n(x, t) \xrightarrow{\text{一致收敛}} \mathrm{T}(x, t)$, $(x, t) \in \mathrm{J}_u' \times [0, T]$;

(iv) $q_s(f, g) = \lim\limits_{n \to \infty} q_s^{(n)}(f, g), \forall f, g \in \mathrm{H}, s \in [0, T]$ 且收敛关于 $f, g$ 为一致的;

(v) 对每一 $n(n = 1, 2, \cdots)$ 存在 $W^{(n)}$ 与独立的广义 Wiener过程 $Z^{(n)}$ 使:

$$W = W^{(n)} + Z^{(n)}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$\{X_t^{(n)}\}$, $\{X_t\}$ 分别表示 (1) 和 (2) 的解,则:

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} X_t, t \in [0, T].$$

证明 $Eu'^2(X_t^{(n)} - X_t) = Eu'^2\Big(x^{(n)} - x + \int_0^t \mathrm{T}_n(X_s^{(n)}, s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{T}(X_s, s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}(X_s^{(n)}, s)\, i_{q_s^{(n)} q}\,\mathrm{d}W_s^{(n)} - \int_0^t \mathrm{e}(X_s, s)\,\mathrm{d}W_s\Big) \leqslant 3Eu'^2(x^{(n)} - x) + 3Eu'^2\Big(\int_0^t \mathrm{T}_n(X_s^{(n)}, s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{T}(X_s, s)\,\mathrm{d}s\Big) + 3Eu'^2\Big(\int_0^t \mathrm{T}(X_s^{(n)}, s)\, i_{q_s^{(n)} q}\,\mathrm{d}W_s^{(n)} - \int_0^t \mathrm{T}(X_s, s)\,\mathrm{d}W_s\Big) \triangleq I_1 + I_2 + I_3$,

由条件 (ii) 知 $I_1 \to 0, n \to \infty$.

$I_2 \leqslant 3T\int_0^t Eu'^2(\mathrm{T}_n(X_s^{(n)}, s)\,\mathrm{d}s - \mathrm{T}(X_s, s))\,\mathrm{d}s \leqslant$

2000-01-18收稿。

$6T\int_0^t E_{u'^2}(\mathrm{T}_n(X_s^{(n)},s)\,ds - \mathrm{T}(X_s^{(n)},s))\,ds +$

$6T\int_0^t E_{u'^2}(\mathrm{T}(X_s^{(n)},s)\,ds - \mathrm{T}(X_s,s))\,ds = o(n) +$

$6L^2 T\int_0^t E_{u'^2}(X_s^{(n)} - X_s)\,ds,$

$I_3 \leqslant 6E_{u'^2}(\int_0^t \mathrm{e}(X_s^{(n)},s) i_{q_s^{(n)}q}\, dW_s^{(n)} - \int_0^t \mathrm{e}(X_s, s) i_{q_s^{(n)}q}\, dW_s^{(n)}) + 6E_{u'^2}(\int_0^t \mathrm{e}(X_s,s) i_{q_s^{(n)}q}\, dW_s^{(n)} - \int_0^t \mathrm{e}(X_s, s)\, dW_s) = 6E_{u'^2}(\int_0^t [\mathrm{e}(X_s^{(n)},s) - \mathrm{e}(X_s,s)] i_{q_s^{(n)}q}\, dW_s^{(n)}) + I_4 = 6E(\int_0^t | [\mathrm{e}(X_s^{(n)},s) - \mathrm{e}(X_s,s)] i_{q_s^{(n)}q}|^2_{i_{q_s^{(n)}q}}\, ds) + I_4 \leqslant 6E(\int_0^t | [\mathrm{e}(X_s^{(n)},s) - \mathrm{e}(X_s,s)|^2_{q_s^u}\, ds) + I_4 \leqslant 6L^2\int_0^t E_{u'^2}(X_s^{(n)} - X_s)\,ds + I_4,$

由文献 [3]中命题 3. 7及 (v) 有

$q_s^2(f) = r_s^{(n)2}(f) + q_s^{(n)2}(f), f\in \mathrm{H}$,其中 $r_s^{(n)2}(f) = E(Z^{(n)}(f))^2$,

则有:

$I_4 = 6E_{u'^2}(\int_0^t \mathrm{e}(X_s,s) i_{r_s^{(n)}q_s}\, dZ^{(n)}),$

由 $q_s^{(n)} \to q_s$,易知:

$I_4 \to 0, n\to\infty,$

从而有:

$E_{u'^2}(X_t^{(n)} - X_t) \leqslant o(n) + C_{L,T}\int_0^t E_{u'^2}(X_s^{(n)} - X_s)\,ds, t\in [0,T].$

由 Gronwell不等式知: $E_{u'^2}(X_t^{(n)} - X_t) \leqslant o(n)e^{C_{L,T}t} \to 0, n\to\infty, t\in[0,T]$ 即:

$X_t^{(n)} \xrightarrow{L^2} X_t, t\in[0,T].$

**定理 1** 在命题 1的假设下,并假定 $Eu'^2 < \infty$, $x^{(n)} \xrightarrow{L^4(\mathrm{K})} x$, $X^{(n)}$ 为方程 (1)的解过程, $P^{(n)}$ 为 $X^{(n)}$ 在 $c([0,T],\mathrm{J}_u')$,导出的测度,则 $\{P^{(n)}\}$ 为胎紧.

证明 设 $\{a_i\}$ 为 $\mathrm{J}_u$ 的完全正交基, $\{a_i'\}$ 为 $\mathrm{J}_u'$ 中的 $\{a_i\}$ 的对偶基 $c_k$ 是 $\mathrm{J}_u'$ 到 $\mathrm{span}\{a_1',\cdots,a_k'\}$ 上的正交投影,则由文献 [4]中定理 4. 9和命题 1,只须证明下面 3条成立:

1) $\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_n P(\mathrm{k}: u'(X_0^{(n)}(\mathrm{k})) > a) = 0;$

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_n E[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} u'^2(c_k^{\perp} X_t^{(n)})] = 0;$

3) 对每个 $k, k = 1, 2, \cdots$,存在 $C' > 0$,使得:

$\sup\limits_n E[u'^4(c_k X_{t_1}^{(n)} - c_k X_{t_2}^{(n)})] \leqslant C'|t_1 - t_2|^2.$

下面证明这 3条成立.

因为 $P(\mathrm{k}: u'(X_0^{(n)}(\mathrm{k})) > a) = P(\mathrm{k}: u'(x^{(n)}(\mathrm{k})) > a) \leqslant \frac{1}{a^2} E_{u'^2}(x^{(n)}).$

由定理的假设必存在一正常数 $M$ 使

$E_{u'^2}(x^{(n)}(\mathrm{k})) < M, \quad n = 1, 2, \cdots,$

从而有 1) 成立.

因为 $Eu'^2(X_T^{(n)}) = Eu'^2(x^{(n)} + \int_0^T \mathrm{T}_n(X_s^{(n)},s)\,ds + \int_0^T \mathrm{e}(X_s^{(n)},s) i_{q_s^{(n)}q_s}\, dW_s^{(n)}) \leqslant 3Eu'^2(x^{(n)}) + 3TE\int_0^T u'^2(\mathrm{T}_n(X_s^{(n)},s))\,ds + 3E\int_0^T |\mathrm{e}(X_s^{(n)},s) i_{q_s^{(n)}q_s}|^2_{q_s^{(n)}q_s}\, ds \leqslant 3M + 3TE\int_0^T C^2[1 + u'(X_s^{(n)})]^2 ds + 3E\int_0^T C^2[1 + u'(X_s^{(n)})]^2 ds) \leqslant 3M + 6C^2T(1+T) + 6(1+T)C^2\int_0^T E_{u'^2}(X_s^{(n)})\,ds.$

由 Gronwell不等式可得:

$E_{u'^2}(X_T^{(n)}) \leqslant (3M + 6C^2T^2 + 6C^2T)e^{6C^2T(1+T)},$

从 而 有: $\sup\limits_n E_{u'^2}(X_T^{(n)}) \leqslant (3M + 6C^2T^2 + 6C^2T)\times e^{12C^2T(1+T)} < \infty,$

即 $\sup\limits_n \sum\limits_{i=1}^{\infty} E[X_T^{(n)}(a_i)]^2 < \infty.$

又 $E[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} u'^2(c_k^{\perp} X_t^{(n)})] = E[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}(X_t^{(n)}(a_i))^2] \leqslant E[\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}(X_t^{(n)}(a_i))^2] \leqslant 4\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} E(X_t^{(n)}(a_i))^2,$

所以

$\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_n E[\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} u'^2(c_k^{\perp} X_t^{(n)})] \leqslant 4\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_n\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} E(X_t^{(n)}(a_i))^2 = 0,$

从而有 2) 成立.

由文献 [2]中定理 5可有

$E[u'^4(c_k X_{t_1}^{(n)} - c_k X_{t_2}^{(n)})] \leqslant E[u'^4(X_{t_1}^{(n)} - X_{t_2}^{(n)})] \leqslant \bar{C}[1 + Eu'^4(X_{t_2}^{(n)})]|t_1 - t_2|^2 \leqslant \bar{C}[1 + (1 + Eu'^4(x^{(n)}))e^{\tilde{C}T}]|t_1 - t_2|^2.$

所以 $\sup\limits_n E[u'^4(c_k X_{t_1}^{(n)} - c_k X_{t_2}^{(n)})] \leqslant C'|t_1 - t_2|^2,$

$k = 1, 2, \cdots.$

因此 $\{P^n\}$ 为胎紧.

由文献 [4]可知本文所得的胎紧性为进一步弱收敛的证明做好了准备.

## 参考文献


1 宣士斌. 核空间的对偶空间随机微分方程解的存在唯一性. 广西民族学院学报 (自然科学版), 1998, 2 14~ 17.

2 宣士斌. 核空间的对偶空间值随机过程 Itô公式. 广西大学学报 (自然科学版), 1999, 3 22~ 26.

3 Yoshio Miyahara. Stochastic evolution equations and white noise analysis. Carteton Mathematical Lecture Notes, 1982, 42 18~ 29.

4 Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York: John Wiley & Sons, 1968, 10~ 55.


(责任编辑: 黎贞崇)