

# 时空混沌的相互耦合同步\*

## Co-Coupled Synchronization of Spatiotemporal Chaos

王铁邦 陈光旨 覃团发\*\*  
Wang Tiebang Chen Guangzhi Qin Tuanfa

(广西大学物理系 南宁市西乡塘路 10号 530004)

(Department of Physics, Guangxi University, 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要** 给出利用相互耦合来实现混沌同步的一种方法,计算最大 Liapunov 指数谱,讨论并给出耦合系数合同步时间之间的关系.

**关键词** 时空混沌同步 耦合系数 同步时间

中图法分类号 O 414

**Abstract** An approach of mutual coupling to implement the synchronization of spatiotemporal chaos was present. The largest Liapunov exponent spectra were calculated. And the connection between the coupling parameter and the synchronization time was discussed and given.

**Key words** synchronization of spatiotemporal chaos, coupling parameter, synchronization time

自 1990年, Pecora和 Carroll<sup>[1]</sup>开创性地提出驱动-响应同步方案(下简称 PC),并首先在电子线路中得到实现<sup>[2]</sup>以来,混沌同步一直是人们研究的热点之一,无论是理论上还是实验上都做了大量的工作.迄今混沌同步在低维系统中的框架已经基本形成<sup>[3]</sup>,基于驱动-响应同步法的各种方法,在 Lorenz系统和 Rössler系统等低维系统中取得了成功.但是时空混沌的情况就不一样了,时空混沌包含更多的信息.首先,自然界中许多非线性现象具有时空混沌性.耦合普通微分方程(CODES)偏微分方程(PDES)耦合映象格子(CMLS)和细胞自动控制(CA)是几个典型的时空混沌模型<sup>[3]</sup>.其次非线性系统的时空混沌可以较好地实现同步化.在有限空间点上的 PDES系统,用驱动-响应方法已经取得了同步,并且已讨论时空混沌的控制<sup>[4]</sup>.一维 CA系统的同步也已经得到.耦合映象格子(CMLS)的非线性耦合同步也已经得到<sup>[5]</sup>,并且发现相互耦合能导致广义同步<sup>[6]</sup>.耦合映象格子(CMLS)用主动-被动分拆同步法(APD)也得到了时空混沌同步<sup>[7]</sup>.但对时空混沌还有很多工作要做,如在 PDES CODES和 CMLS系统中时空混沌的特性和分类仍需进一步的研究;如何表述时空混沌在时间和空间上表现混沌的这种特性,以及时空混沌同步中,同步的时间和准确性仍需做深入的

研究.本文仅就 CODES的混沌同步做一些研究.

### 1 混沌同步

本文用相互耦合的方法在非线性时空混沌系统 CODES中实现了完全同步,计算了最大 Liapunov 指数谱,并且研究了耦合系数与同步时间的关系.

对时空混沌模型,我们考虑 1个耦合 Lorenz系统(既 CODES模型)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \epsilon(y_i - x_i) + D(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \dot{y}_i = rx_i - y_i - x_i z_i, \\ \dot{z}_i = x_i y_i - bz_i. \end{cases} \quad (1)$$

做为例子.其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ,其他参数分别为:  $\epsilon = 10, r = 23, b = 1$ 和  $D = 6$ .模型(1)在上面的参数条件下,用周期边界条件  $x^0 = x^N$ 和  $x^{N+1} = x^1$ ,表现出时空混沌<sup>[8]</sup>.文中的数字模拟就用上面的参数值和周期边界条件.

考虑和 CODES模型(1)同样的两个时空混沌系统,其中一个记为  $xyz$ 系统,另一个记为  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ 系统.在这 2个时空混沌系统上加上相互耦合,则分别为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \epsilon(y_i - x_i) + D(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ \quad + c(\tilde{x}_i - x_i), \\ \dot{y}_i = rx_i - y_i - x_i z_i + c(\tilde{y}_i - y_i), \\ \dot{z}_i = x_i y_i - bz_i + c(\tilde{z}_i - z_i). \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \epsilon(\tilde{y}_i - \tilde{x}_i) + D(\tilde{x}_{i+1} - 2\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i-1}) \\ \quad + c(x_i - \tilde{x}_i), \\ \dot{\tilde{y}}_i = r\tilde{x}_i - \tilde{y}_i - \tilde{x}_i \tilde{z}_i + c(y_i - \tilde{y}_i), \\ \dot{\tilde{z}}_i = \tilde{x}_i \tilde{y}_i - b\tilde{z}_i + c(z_i - \tilde{z}_i). \end{cases} \quad (3)$$

系统(2)和系统(3)为 2个时空混沌系统,在这 2个系统之间加上了相互耦合,其中为耦合系数.调节耦合系数,可以使系统(2)和系统(3)达到同步.

2000-11-02收稿.

\* 广西自然科学基金项目(桂科目 9912005)

\*\* 广西大学计算机与信息工程学院,南宁西乡塘路 10号,530004  
(College of Computer and Information Engineering, Guangxi University, 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \tilde{x}_i)^2 + (y_i - \tilde{y}_i)^2 + (z_i - \tilde{z}_i)^2 \quad (4)$$

来表征 2 个系统的同步. 其中  $x_i, y_i, z_i$  是系统  $xyz$  的分量,  $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i$  是系统  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  的分量. 当函数  $e$  随着时间的演化而趋于零时, 则表明系统  $xyz$  和系统  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  达到同步; 否则这两个系统就没有同步. 同时我们考虑一个分量函数

$$e_1 = z_{60} - \tilde{z}_{60} \quad (5)$$

随时间的演化, 来反映其中的细节变化.

取  $N = 100$ , 系统 (2) 和系统 (3) 的初值分别在 0 到 1 之间的均匀分布随机数序列中取. 下面的数字模拟的初值也都在该均匀分布随机数序列中取. 当不加耦合 (既  $c = 0$ ) 时, 其数字模拟结果, 函数  $e$  和函数  $e_1$  随时间  $t$  的变化, 显示在图 1 中. 由图 1 可以看出,  $e$  和  $e_1$  并没有随着时间  $t$  的演化而取趋于零, 因而系统 (2) 和系统 (3) 也并没有达到同步.

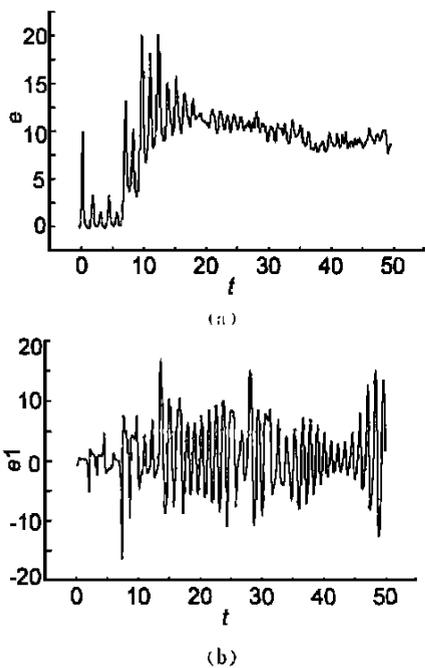


图 1 未加耦合时的  $e$  和  $e_1$  随时间的变化

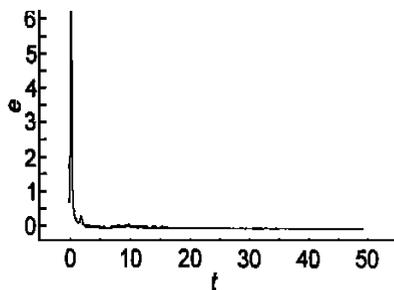
Fig. 1 Evolution of the error  $e$  and  $e_1$  with time in no coupled

若加上耦合, 取耦合系数  $c = 0.6$ , 则函数  $e$  和函数  $e_1$  随时间  $t$  变化的数字模拟结果见图 2. 由图 2 可以明显看出, 函数  $e$  和函数  $e_1$  随着时间的演化而趋于零. 由此可见, 在系统 (2) 和系统 (3) 加上相互耦合  $c = 0.6$  时, 这两个系统达到了同步.

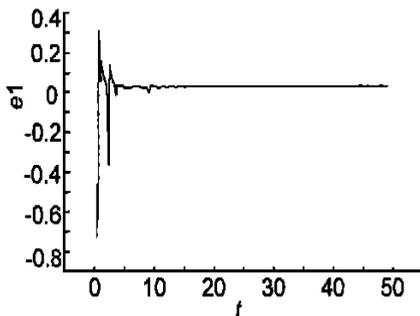
综上所述, 当在 2 个时空混沌系统上加上适当的耦合后, 这 2 个时空混沌系统能达到同步.

## 2 最大 Liapunov 指数和耦合系数

是不是任意取耦合  $c$ , 都能使系统 (2) 和系统 (3)



(a)



(b)

图 2 加耦合 ( $c = 0.6$ ) 时的  $e$  和  $e_1$  随时间的变化

Fig. 2 Evolution of the error  $e$  and  $e_1$  with time combined coupled ( $c = 0.6$ )

达到了同步? 回答是否定的.

如何选择合适的耦合  $c$ ? 我们的方法通常是考虑两系统对应变量之差,  $e_{xi} = x_i - \tilde{x}_i, e_{yi} = y_i - \tilde{y}_i, e_{zi} = z_i - \tilde{z}_i$  的演化. 由 (2) 和 (3) 可得,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{bmatrix} = Z_{ij} \begin{bmatrix} e_{xi} \\ e_{yi} \\ e_{zi} \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

其中  $Z_{ij}$  是一矩阵. 我们选择适当的耦合系数  $c$ , 使  $|Z_{ij}|$  的本征值的绝对值小于 1, 于是这两个系统会最终将达到同步. 在低维系统的同步, 这是一个常用的方法. 但对于系统 (2) 和系统 (3) 这样的高维时空混沌, 这样做就相当麻烦.

通过计算最大 Liapunov 指数发现, 当最大 Liapunov 指数小于零时, 则 2 个系统就会达到同步. 将系统 (2) 和 (3) 看成一个大的系统. 在这个系统旁边构造一个参考系统. 这个大系统和参考系统的距

离是  $\sum_{i=1}^N W_{x0}(i) + W_{y0}(i) + W_{z0}(i)$ , 则最大 Liapunov 指数为:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^N W_{x_t}(i) + W_{y_t}(i) + W_{z_t}(i)}{\sum_{i=1}^N W_{x_0}(i) + W_{y_0}(i) + W_{z_0}(i)}, \quad (7)$$

图 3 给出了系统 (2) 和系统 (3) 的最大 Liapunov 指数的数字模拟的结果, 从图 3 可以看出, 当大于 0.25

时,最大 Liapunov 指数  $L$  都小于零. 也就是,只要我们加上的耦合  $c$  大于 0.25, 经过一段时间后, 系统 (2) 和系统 (3) 会最终达到同步. 这表明, 对于时空混沌的相互耦合同步, 并不是耦合系数取所有的值都能使系统达到同步, 只有耦合系数在一定的范围内才能使系统达到同步. 耦合系数存在一定的阈值. 因此, 我们要使两个系统达到同步, 耦合系数的选取是至关重要的. 耦合系数选取得不合适, 是不会达到同步的. 即确定耦合系数的阈值是实现同步的关键.

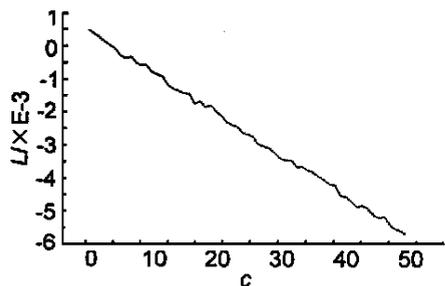


图 3 CODES模型的最大 Liapunov 指数谱

Fig. 3 The largest Liapunov exponent spectra of the CODES model

### 3 同步时间

实际应用中还要考虑一个问题, 那就是同步所需要的时间. 有时需要快速同步, 有的则需要经一定的时间再同步. 同步时间和耦合系数有密切的关系.

对系统 (2) 和系统 (3), 我们取耦合系数  $c = 1.0$ , 让这 2 个系统进行耦合. 图 4 显示了  $e$  和  $e_1$  随时间变化的关系.

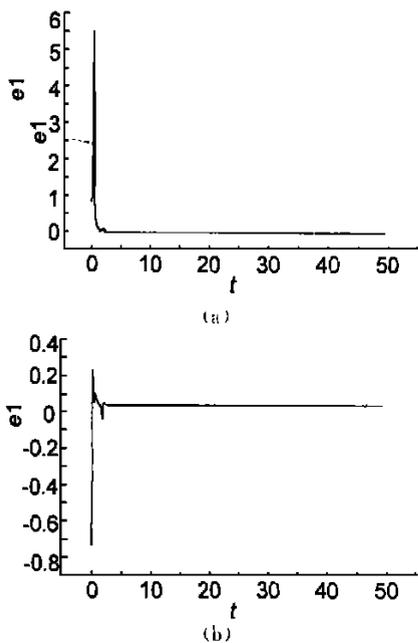


图 4 加耦合 ( $c = 1.0$ ) 时的  $e$  和  $e_1$  随时间的变化

Fig. 4 Evolution of the error  $e$  and  $e_1$  with time combined coupled ( $c = 1.0$ )

我们可以看到,  $e$  和  $e_1$  随时间的演化而趋于零, 系统 (2) 和系统 (3) 达到了同步. 同时我们对图 2 中的 (a), (b) 和图 4 中的 (a), (b), 可以明显地看出. 耦合系数  $c$  取 0.6 时同步所用的时间比耦合系数  $c$  取 1.0 时同步所用的时间要长. 那么是不是耦合系数越大, 同步所用的时间就越短呢? 图 5 给出了耦合系数  $c$  和同步时间  $T$  的关系图. 从图 5 可以看出, 虽然中间有一些小的起伏, 但是大体上是耦合系数越大, 同步时间也就越短. 这是一个非常重要的结论, 在同步过程中可以根据该结论和实际的需要来选择合适的耦合系数.

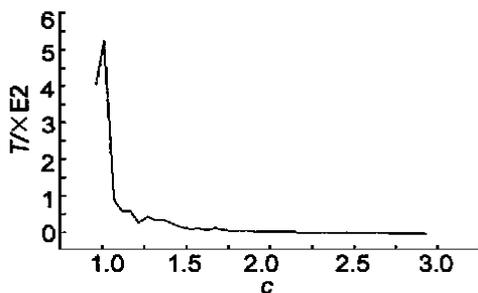


图 5 耦合系数  $c$  和同步时间  $T$  的关系图

Fig. 5 Connection diagram of the coupling parameter  $c$  and the synchronization time  $T$

### 4 结语

我们用相互耦合的方法实现了时空混沌系统 CODES 的同步. 计算了最大 Liapunov 指数谱, 给出了能使 CODES 模型实现同步的耦合系数的阈值. 讨论并给出了耦合系数和同步时间的关系. 时空混沌不仅在时间上, 而且在空间上都表现出不确定性, 保密性就更强. 因此, 时空混沌系统 CODES 的同步在保密通讯中的应用前景是相当广阔的.

#### 参考文献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaos systems. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821.
- 2 Carroll T L, Pecora L M. A circuit for studying the synchronization of chaotic systems. Int J Bif Chaos, 1992, 2: 659.
- 3 Kocarev L et al. Synchronizing spatiotemporal chaos. Chaos, 1997, 7: 635.
- 4 Kocarev L, Tasev Z, Parlitz U. Synchronization spatiotemporal chaos of partial differential equations. Phys Rev Lett, 1997, 79: 51.
- 5 Bagnoli F, Rechtman R. Synchronization and maximum Liapunov exponents of cellular automata. Phys Rev E, 1999, 59: R1307.
- 6 Liu Z H, Chen S G, Hu B. Coupled synchronization of spatiotemporal chaos. Phys Rev E, 1999, 59: 2817.
- 7 Wang J L et al. Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled map lattices via active-passive decomposition. Phys Rev E, 1998, 58: 3017.

(责任编辑: 黎贞崇)