DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.02.001
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (2): 81~ 83

下鞅差序列的几乎处处收敛性*
Almost Sure Convergence Properties of Submartingale Difference Random Sequences

吴群英
Wu Qunying

(桂林工学院基础部 桂林市建干路 12号 541004)
(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 通过讨论下鞅差序列的广义 Jamison型加权和的几乎处处收敛性,获得了比独立情形还强的 Jamison定理和 Marcinkiewicz强大数律,推广和改进了这两个定理.
关键词 下鞅差序列 广义 Jamison型加权和 几乎处处收敛 Jamison定理 Marcinkiewicz强大数律
中图法分类号 O 211.4

Abstract The almost sure convergence properties of general Jamison weighted sums of submartingale difference random sequencesis was discussed. The results obtained are better than those of the independent case, extend and improve the famous Jamison theorem and Marcinkiewicz strong law of large number.
Key words submartingale difference random sequence, general Jamison weighted sums, almost sure convergence, Jamison theorem, Marcinkiewicz strong law of large number

1 定义与引理

定义 1 称概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的适可测函数列 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为下鞅差序列,若对 $\forall n \geqslant 1$, $E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)$ 有定义,并且 $E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) \geqslant 0$, a.s.; 称 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为下鞅序列,若对 $\forall n \geqslant 1$, $E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n)$ 有定义,并且

$$E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) \geqslant X_n, \text{a.s.}.$$

下鞅差概念是一个相当一般的概念,事实上,正随机变量列是下鞅差序列,期望非负的独立随机变量列也是下鞅差序列,即下鞅差序列是一类非常广泛的随机变量列,对其进行研究是很有价值的,有关它的收敛性质, Doob[1]及 Chow[2,3]等对其进行了研究,获得了一些十分完美的结果,如 Doob的下鞅基本收敛定理等;但有关它的加权和的收敛性还未见文献报告,文献 [4]把独立情形加权和的某些收敛性质推广到混合情形,因此本人推断下鞅差序列的加权和也应具有某种收敛性质.本文讨论了下鞅差序列的广义 Jamison型加权和的几乎处处收敛性,获得了比独立情形更完美的结果,推广和改进了 Jamison定理和 Marcinkiewicz强大数律.

Jamison 定理[5] 设 $\{X_n\}$ 是 i.i.d.(独立同分布)列, $\{a_i\}$ 是正数列,满足条件 $E|X_1| < \infty$, $EX_1 = 0$, $A_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i \uparrow \infty$, $n \to \infty$, $N(n) = \#\{i: A_i a_i^{-1} \leqslant n\} = O(n)$, $n \geqslant 1$, 则

$$T_n \triangleq A_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \to 0, \text{a.s.} n \to \infty.$$

Marcinkiewicz 定理[6] 设 $\{X_i\}$ 是 i.i.d. 列, $E|X_1|^r < \infty$, $0 < r < 2$, 且当 $1 \leqslant r < 2$ 时, $EX_1 = 0$, 则 $\frac{S_n}{n^{1/r}} \to 0$, a.s..

本文不但把 Jamison定理的期望为零的独立情形推广到下鞅差序列,并把 $N(n) = O(n)$, $E|X_1| < \infty$ 推广到更一般的情况 $N(n) = O(f(n))$, $Ef(|X_1|) < \infty$, 以及把 $\{A_i\}$ 推广到一般数列,即不要求 $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, 而且作为定理的特例还获得比期望为零的独立情形更完美的 Marcinkiewicz强大数律.

为行文方便,本文一律以 C 记与 n 无关的正常数,“$\ll$”表示通常的大“O”, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $N(n) \triangleq \#\{i: A_i a_i^{-1} \leqslant n\}$.

引理 1

(i) $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是下鞅差序列当且仅当 $\{S_n,$

2000-08-10收稿, 2000-12-06修回。
* 广西自然科学基金资助项目(桂科青 9912008)。

$\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是下鞅序列；

(ii) 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是下鞅差序列，a 是正实数，则 $\{aX_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 仍是下鞅差序列；

(iii) 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是下鞅差序列，$g_n(x)$ 是连续非降凸函数，且 $g_n(0)=0$，则 $\{g_n(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 仍是下鞅差序列.

证明 (i) 和 (ii) 是周知的结果，下证 (iii)，由 Jensen不等式及引理 (iii) 的条件得

$$E(g_{n+1}(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)\geqslant g_{n+1}(E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n))\geqslant g_{n+1}(0)=0,$$

故 $\{g_n(X_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 仍是下鞅差序列.

引理 2[7] 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是下鞅差序列，且满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}E|X_i|^p<\infty,\ 0<p\leqslant 2,$$

则 $\sum_{i=1}^{\infty}X_i$ a.s. 收敛.

定义 2 设函数 $l(x)>0(x>0)$，若存在 $x_0>0$ 及常数 $C>0$，使得任意 $t\geqslant x\geqslant x_0$，恒有 $l(t)\geqslant Cl(x)$，则称 $l(x)$ 为拟单调上升的，若 $l(t)\leqslant Cl(x)$，则称 $l(x)$ 为拟单调下降的.

引理 3 设 $h(x)>0$ 为慢变函数，则对 $\forall\varepsilon>0$，$x^{\varepsilon}h(x)$ 为拟单调上升函数，$x^{-\varepsilon}h(x)$ 为拟单调下降函数.

证明 由慢变函数的性质有

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{2^k\leqslant x\leqslant 2^{k+1}}\frac{h(x)}{h(2^k)}=1,\ \lim_{k\to\infty}\inf_{2^k\leqslant x\leqslant 2^{k+1}}\frac{h(x)}{h(2^k)}=1.$$

所以 $\exists N_0$，使当 $k\geqslant N_0$ 时，有

$$\sup_{2^k\leqslant x\leqslant 2^{k+1}}\frac{h(x)}{h(2^k)}\leqslant 2^{\varepsilon},\quad \inf_{2^k\leqslant x\leqslant 2^{k+1}}\frac{h(x)}{h(2^k)}\geqslant 2^{-\varepsilon}.\tag{1}$$

对 $\forall t\geqslant x\geqslant 2^{N_0}$，取 $N_2\geqslant N_1\geqslant N_0$，使得

$$2^{N_1}\leqslant x\leqslant 2^{N_1+1},\ 2^{N_2}\leqslant t\leqslant 2^{N_2+1}.\tag{2}$$

由 (1)、(2) 式得

$$t^{\varepsilon}h(t)\geqslant t^{\varepsilon}\inf_{2^{N_2}\leqslant t\leqslant 2^{N_2+1}}\frac{h(t)}{h(2^{N_2})}h(2^{N_2})\geqslant t^{\varepsilon}2^{-\varepsilon}h(2^{N_2})\geqslant t^{\varepsilon}2^{-\varepsilon}\inf_{2^{N_2-1}\leqslant t\leqslant 2^{N_2}}\frac{h(t)}{h(2^{N_2-1})}h(2^{N_2-1})\geqslant t^{\varepsilon}2^{-2\varepsilon}h(2^{N_2-1})\geqslant\cdots\geqslant t^{\varepsilon}2^{-\varepsilon(N_2-N_1+1)}h(2^{N_1}).\tag{3}$$

因为

$$\frac{h(x)}{h(2^{N_1})}\leqslant\sup_{2^{N_1}\leqslant x\leqslant 2^{N_1+1}}\frac{h(x)}{h(2^{N_1})}\leqslant 2^{\varepsilon},$$

所以 $h(2^{N_1})\geqslant 2^{-\varepsilon}h(x)$, (4)

且 $x^{\varepsilon}\leqslant 2^{\varepsilon(N_1+1)}=\frac{2^{\varepsilon(N_1+1)}}{2^{\varepsilon N_2}}2^{\varepsilon N_2}\leqslant 2^{\varepsilon(N_1-N_2+1)}t^{\varepsilon}$, (5)

把 (4)、(5) 式代入 (3) 式得

$$t^{\varepsilon}h(t)\geqslant x^{\varepsilon}2^{-\varepsilon(N_1-N_2+1)}2^{-\varepsilon(N_2-N_1+2)}h(x)=2^{-3\varepsilon}x^{\varepsilon}h(x).$$

故 $x^{\varepsilon}h(x)$ 为拟单调上升函数；

同理可证：$t^{-\varepsilon}h(t)\leqslant 2^{3\varepsilon}x^{-\varepsilon}h(x)$，即 $x^{-\varepsilon}h(x)$ 为拟单调下降函数.

2 主要结果及其证明

定理 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布下鞅差序列，$\{a_i\}$ 为正数列，$0<A_n\uparrow\infty$，$h(x)>0$为慢变函数，$f(x)\triangleq x^r h(|x|)$，$0<r<2$，

$$E(f(|X_1|))<\infty,\tag{6}$$

$$N(n)\ll f(n),\ n\geqslant 1,\tag{7}$$

则 $$T_n\triangleq A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\to 0,\ \text{a.s.}.\tag{8}$$

在定理中取 $A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$r=1$，$h(x)=1$，定理即为下鞅差序列的一般 Jamison定理，即有

推论 1 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是同分布下鞅差序列，$\{a_i\}$ 是正数列，满足条件 $E|X_1|<\infty$，$A_n\triangleq\sum_{i=1}^{n}a_i\uparrow\infty$，$n\to\infty$，$N(n)=\#\{i: A_ia_i^{-1}\leqslant n\}=O(n)$，$n\geqslant 1$，则

$$T_n\triangleq A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\to 0,\ \text{a.s.}\ n\to\infty.$$

在定理中取 $a_i=1$，$A_i=i^{1/r}$，$h(x)=1$，则 $N(n)=n^r$ 满足定理条件 (7)，故有：

推论 2 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是同分布下鞅差序列，$E|X_1|^r<\infty$，$0<r<2$，则.

$$\frac{S_n}{n^{1/r}}\to 0,\ \text{a.s.}.$$

由于期望为零的独立随机序列是下鞅差序列，所以本文定理推广和改进了 Jamison定理和 Marcinkiewicz强大数律.

定理的证明

设 $N(0)=0$，$b_i\triangleq A_ia_i^{-1}$，由 (7) 式得 $b_i\to\infty$，$i\to\infty$，如不然，则有无穷多个 i，及某个 n_0使 $b_i\leqslant n_0$，由 (7)式得 $N(n_0)=\infty\ll f(n_0)$，这是不可能的，因此，$b_i\to\infty$，$i\to\infty$.

记 $Y_i=-b_iI_{(X_i<-b_i)}+X_iI_{(|X_i|\leqslant b_i)}+b_iI_{(X_i>b_i)}$，则有

$$T_n=A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(X_i-Y_i)+A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\triangleq I_1+I_2.\tag{9}$$

由 (6) 及 (7) 式得.

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(X_i\neq Y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(|X_i|\geqslant b_i)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j}P(|X_i|\geqslant b_i>j-1)=\sum_{j=1}^{\infty}(N(j)-N(j$$

$-1))P(|X_1| \geqslant j-1)=\sum_{j=1}^{\infty} N(j)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} j^r h(j)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} E|X_1|^r h(|X_i|)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \leqslant E|X_i|^r h(|X_i|)=E(f(|X_1|))<\infty$.

由 Borel-Cantelli 引理得 $P(X_i \neq Y_i, \text{a.o.})=0$,

故 $I_1=A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i-Y_i) \to 0 \text{ a.s.};$ (10)

所以要证(8)式,只需证明 $I_2=A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \to 0,$ a.s.. (11)

因为 $0<A_n \uparrow \infty$,由 Kronercker 引理,只需证明

$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1} a_i Y_i$ a.s.收敛,

因为 $a_i A_i^{-1}>0, b_i>0$ 及 $g_i(x)=-b_i I_{(x<-b_i)}+xI_{(|x|\leqslant b_i)}+b_i I_{(x>b_i)}$ 满足引理 1的条件(iii),由引理 1的(ii)及(iii)知 $\{A_i^{-1} a_i Y_i, \mathscr{F}_i, i \geqslant 1\}$ 仍然是下鞅差序列,故在引理 2中取 $p=2$ 得只需证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(A_i^{-1} a_i Y_i)^2<\infty. \qquad (12)$$

因为 $\sum_{i=1}^{\infty} E(A_i^{-1} a_i Y_i)^2=\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-2} a_i^2 EY_i^2=\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j-1<b_i \leqslant j} A_i^{-2} a_i^2 EY_i^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j-1<b_i \leqslant j} b_i^{-2}[b_i^2 P(|X_i| \geqslant b_i)+EX_i^2 I_{(|X_i|<b_i \leqslant j)}] \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}(N(j)-N(j-1))[P(|X_1|>j-1)+(j-1)^{-2} EX_1^2 I_{(|X_1| \leqslant j)}] \triangleq H_1+H_2.$ (13)

由引理 3知 $f(x)$ 拟单调上升,由(6)及(7)式,

$H_1=\sum_{j=2}^{\infty} N(j)P(|X_1|>j-1)-\sum_{j=2}^{\infty} N(j)P(|X_1|>j)=\sum_{j=2}^{\infty} N(j)[P(|X_1|>j-1)-P(|X_1|>j)] \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} j^r h(j)P(j \leqslant |X_1|<j+1) \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} E|X_1|^r h(j)P(j \leqslant |X_1|<j+1) \leqslant E(|X_1|^r h(|X_1|))=E(f(|X_1|))<\infty,$ (14)

$H_2=\sum_{j=2}^{\infty}(N(j)-N(j-1))(j-1)^{-2}\sum_{k=1}^{j} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(N(j)-N(j-1))(j-1)^{-2} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)}=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} N(j)((j-1)^{-2}-j^{-2}) EX_1^2 I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^r h(j)((j-1)^{-2}-j^{-2}) EX_1^2 I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^{r-3} h(j) EX_1^2 I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)},$ (15)

因为 $r<2$,取 $0<W<2-r$,有 $r+W-2<0$,且由 $x^{-W}h(x)$ 及 $x^{r-2}h(x)$ 拟单调下降得

$\sum_{j=k}^{\infty} j^{r-3} h(j)=\sum_{j=k}^{\infty} j^{r-3+W} j^{-W} h(j) \leqslant k^{-W} h(k)\sum_{j=k}^{\infty} j^{r-3+W} \leqslant k^{-W} h(k)\sum_{j=k}^{\infty} j^{r+W-3} \leqslant k^{-W} h(k)\int_k^{\infty} x^{r+W-3}dx=k^{-W} h(k)\frac{1}{r+W-2} x^{r+W-2}\Big|_k^{\infty}=k^{-W} h(k)\frac{1}{-r-W+2} k^{r+W-2} \leqslant k^{r-2} h(k),$

把上式代入(15)式,且注意到 $x^{r-2}h(x)$ 拟单调下降得

$H_2 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k^{r-2} h(k) E|X_1|^r |X_1|^{2-r} I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} E(|X_1|^{r-2} h(|X_1|)|X_1|^r |X_1|^{2-r}) I_{(k-1<|X_1| \leqslant k)} \leqslant E|X_1|^r h(|X_1|)=Ef(|X_1|)<\infty.$ (16)

综合(13)、(14)、(16)式得(12)式成立. 证毕.

参考文献

1 Doob J L. Stochastic Processes. Wiley, New York, 1953.

2 Chow Y S. Local convergence of Martingales and the law of large numbers. Ann Math Statist, 1965, 36: 552~558.

3 Chow Y S. Convergence of sums of squares of Martingale differences. Ann Math Statist, 1968, 39: 123~133.

4 吴群英. ρ混合、φ混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性. 广西科学, 2000, (4): 241~245.

5 Jamison B, Orey S, Pruitt W. Convergence of weighted of independent random variables. Z Wahrsch Verb Gebiete, 1965, 4: 40~44.

6 Marcinkiewicz J, Zygmund A. Surplus fonctions indépendantes. Fund Math, 1937, 29: 60~90.

7 Stout W F. Almost sure convergence. New York: Academic Press, 1974.

(责任编辑: 黎贞崇)