DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.03.006
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (3): 180~183

基于多分辨框架下实现数字滤波器

Implementation of Digital Filters in the Framework of MRA

蔡 毓 刘贵忠 侯兴松 王海龙
Cai Yu Liu Guizhong Hou Xingsong Wang Hailong

(西安交通大学电信学院信息与通信工程系 陕西西安 710049)
(Dept. of Info. & Communication Engineering, Telecommunication Institute, Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an, Shaanxi, 710049, China)

摘要 用复频域(z域)分析方法分析二通道滤波器的结构模型,提出测定信噪比的算法。与数字 Hilbert滤波器进行比较,结果表明,在小波域内,基于多分辨框架下,利用二通道滤波器可实现一般数字滤波器滤波效果。在子带间窜扰可忽略情形下,该二通道滤波器可推广到多层次情形。
关键词 数字滤波 Hilbert数字滤波器 小波域 滤波器组
中图法分类号 TN 713.7

Abstract For more denoising, a model structure of two-canal filter is analyzed in terms of the complex frequency domain (Z-domain), and a algorithm for denoising is developed. In comparison with the digital Hilbert filter, the similar filtering result was obtained with two-canal filter in the framework of MRA in the wavelet domain. This two-canal filter could be employed in multi-layer situation, if the interference among subbands is ignore.
Key words digital filters, digital Hilbert filters, wavelet domain, group of filters

在数值分析和信号处理的许多场合,经常要考虑在小波域内实现数字滤波的问题,即已知一信号的小波展开,求该信号滤波后的小波展开。在小波域内处理信号能够应用小波域内许多成熟的信号处理方法,如固有的去噪方法。这个问题在文献[1]中有理论上的探讨,但是在实际数字信号处理应用中存在一些问题,本文尝试从工程的角度给出另外一种分析。

与通常的滤波器组不同,通常的 DWT所用的二通道完全重建滤波器组包含有非线性的抽取和内插环节,因此该滤波器组不是 LTI系统,不能使用通常的滤波器交换位置来分析。本文通过使用复频域(z域)分析方法,对一般的数字滤波器等效的二通道滤波器作了分析,并就数字 Hilbert滤波器的特例作了讨论。主要是对各不同子带之间的串扰作了分析。在

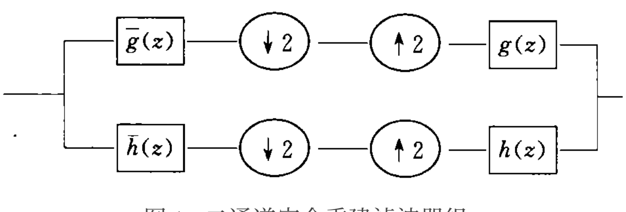

图 1 二通道完全重建滤波器组

Fig. 1 Group of two-canal perfect-reconstruction filters

2001-02-16收稿。

某些近似条件下,可以认为各子带分别滤波即可以反映原始信号滤波后的情形。

1 二通道正交滤波器组

文中要讨论的二通道完全重建滤波器组是我们在快速正交小波变换中常使用的共轭镜像滤波器组(图 1)。

2 利用二通道滤波器实现一般的数字滤波器

如图 1所示的二通道共轭镜像滤波器组实际上是一个全通系统,我们考虑下面一种级联结构。

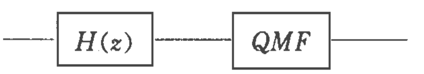

图 2 级联结构

Fig. 2 Cascade connection

显然,图 2即等效于本文中提到的方法,我们将考虑把图 2等效为如下结构。

文中采用的等效模型如图 3,其中将黑虚线框内的网络细化,得到如下模型,我们将证明下面这个模型是合理的。

在这个模型下,我们仅考虑图 4中 3个端口与图 3

中虚线框 3个端口的外特性等效。这样,我们的等效问题归结到求,$A(z)$,$B(z)$,$\Gamma(z)$,$T(z)$ 4个等效滤波器上。

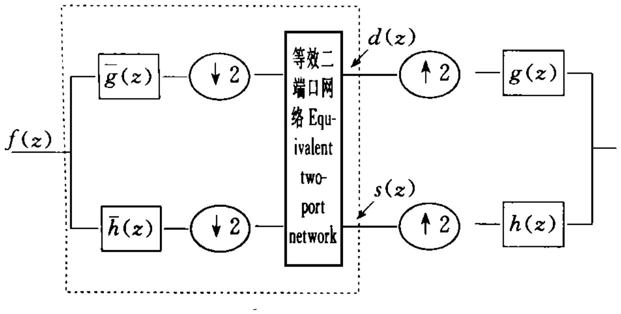

图 3　图 2的二通道等效图

Fig. 3　Equivalent graph of Fig. 2

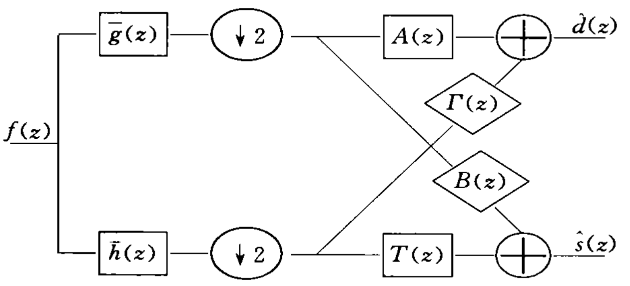

图 4　图 3中虚线框的等效图

Fig. 4　Equivalent graph of the dashed frame in Fig. 3

对于虚线框上半支路而言,图 3有

$$\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})g(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})g(-z^{\frac{1}{2}})]=d(z), \tag{1}$$

图 4有

$$\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})g(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})g(-z^{\frac{1}{2}})]A(z)+\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})h(-z^{\frac{1}{2}})]B(z)=\hat{d}(z), \tag{2}$$

对于下半支路而言,图 3有

$$\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})s(-z^{\frac{1}{2}})]=s(z), \tag{3}$$

图 4有

$$\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})g(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})g(-z^{\frac{1}{2}})]\Gamma(z)+\frac{1}{2}[f(z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})+f(-z^{\frac{1}{2}})h(-z^{\frac{1}{2}})]T(z)=\hat{d}(z), \tag{4}$$

把 (1)式和(3)式写在一起,为表示方便,先省掉$\frac{1}{2}$,有

$$\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(z^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & H(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(z^{\frac{1}{2}}) \\ f(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

把(2)式和(4)式写在一起,得

$$\begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ \Gamma(z) & T(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(z^{\frac{1}{2}}) \\ f(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

令(5)式等于(6)式,对于任意的 $f(z)$,有

$$\begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ \Gamma(z) & T(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(z^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & H(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

在 $\begin{vmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{vmatrix}=\Delta=g(z^{\frac{1}{2}})h(-z^{\frac{1}{2}})-g(-z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})\neq 0$的假设下,有

$$\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} h(-z^{\frac{1}{2}}) & -g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ -h(z^{\frac{1}{2}}) & g(z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ \Gamma(z) & T(z) \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} g(z^{\frac{1}{2}}) & g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ h(z^{\frac{1}{2}}) & h(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H(z^{\frac{1}{2}}) & 0 \\ 0 & H(-z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(-z^{\frac{1}{2}}) & -g(-z^{\frac{1}{2}}) \\ -h(z^{\frac{1}{2}}) & g(z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$A(z)=\frac{1}{\Delta}[g(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})h(-z^{\frac{1}{2}})-g(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})], \tag{10}$$

$$B(z)=\frac{1}{\Delta}[-g(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})g(-z^{\frac{1}{2}})+g(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})g(z^{\frac{1}{2}})], \tag{11}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{\Delta}[h(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})h(-z^{\frac{1}{2}})-h(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})h(z^{\frac{1}{2}})], \tag{12}$$

$$T(z)=\frac{1}{\Delta}[-h(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})g(-z^{\frac{1}{2}})+h(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})g(z^{\frac{1}{2}})], \tag{13}$$

因为有 $g_k=(-1)^{k-1}h_{2M-k+1}$. (14)

对(14)式做 z变换,得

$$g(z)=z^{-2M-1}h(-z^{-1}) \text{ 或 } g(-z)=-z^{-2M-1}h(z^{-1}). \tag{15}$$

以(13)式为例,可以推倒时域表达式

$$T(z)=\frac{z^{-M-\frac{1}{2}}h(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})h(z^{-\frac{1}{2}})+z^{-M-\frac{1}{2}}h(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})h(z^{-\frac{1}{2}})}{z^{-M-\frac{1}{2}}h(z^{\frac{1}{2}})h(z^{-\frac{1}{2}})+z^{-M-\frac{1}{2}}h(-z^{\frac{1}{2}})h(-z^{-\frac{1}{2}})}=\frac{h(z^{\frac{1}{2}})H(z^{\frac{1}{2}})h(z^{-\frac{1}{2}})+h(-z^{\frac{1}{2}})H(-z^{\frac{1}{2}})h(-z^{-\frac{1}{2}})}{h(z^{\frac{1}{2}})h(z^{-\frac{1}{2}})+h(-z^{\frac{1}{2}})h(-z^{-\frac{1}{2}})}. \tag{16}$$

在 CQF(conjugate quadrature filter bank)的条件下,有

$$h(z)h(z^{-1})+h(-z)h(-z^{-1})=2. \tag{17}$$

对(16)式做 z的逆变换,得到

$$t(n) = (h(n) * h(-n) * H(n)) \downarrow 2, \qquad (18)$$

$$t(n) = \sum_{k} \sum_{k'} h(k) h(k') H(2n + k - k'). \qquad (19)$$

特别是,在紧支撑小波下,以 Daubechies 小波为例, M 表示零点数

$$t(n) = \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{k'=0}^{2M-1} h(k) h(k') H(2n + k - k'). \qquad (20)$$

类似的,从(10)式到(12)式即可得

$$\mathrm{T}(n) = \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{k'=0}^{2M-1} g(k) g(k') H(2n + k - k') =$$

$$(g(-n)^* g(n)^* H(n)) \downarrow 2, \qquad (21)$$

$$\mathrm{U}(n) = \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{k'=0}^{2M-1} g(k) h(k') H(2n + k - k') =$$

$$(g(-n)^* h(n)^* H(n)) \downarrow 2, \qquad (22)$$

$$\mathrm{V}(n) = \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{k'=0}^{2M-1} h(k) g(k') H(2n + k - k') =$$

$$(h(-n)^* g(n)^* H(n)) \downarrow 2. \qquad (23)$$

以上4个滤波器可以用图5表示出来.

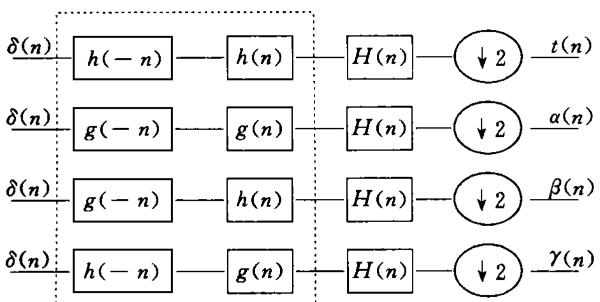

图5 $A(z), B(z), \Gamma(z), T(z)$ 的示意图

Fig. 5 Sketch of $A(z), B(z), \Gamma(z), T(z)$

以上二抽取环节是对应偶抽取的.

3 与数字 Hilbert 滤波器等效的二通道滤波器组

我们以数字 Hilbert 滤波器来分析上面的模型.在这里使用的是有 MATLAB 提供的近似的数字 Hilbert 滤波器.滤波器长度为 64 mm,小波滤波器组用的是 db 40 小波滤波器组.

图6给出图5中4种滤波器中黑线框中的幅频响应对比图.

图7中,就 Hilbert 滤波器而言,它较子带本身的滤波器几乎是可忽略的.即使就不是 Hilbert 滤波器,而是一般的数字滤波器,从图7我们也可以看出,在 db 40 小波滤波器组的情形下,两个交叉滤波器的影响相对子带滤波器的影响是小的.在极端的 Shannon 多分辨情形下,可以预见到,交叉项应该为零.这样,我们可以考虑通过调节 Daubechies 小波和尺度函数的零点数来改善对应的小波滤波器组频率响应的锐截止特性,来尽量减小交叉项的影响.

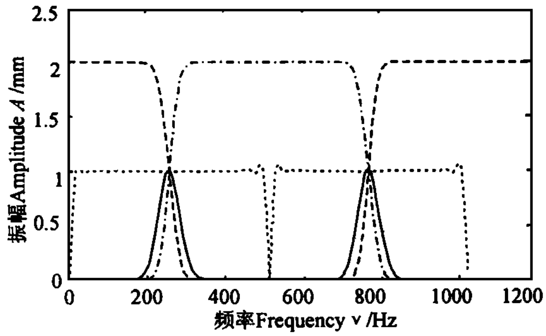

图6 4组滤波器和 Hilbert 滤波器幅频响应对比

Fig. 6 Amplitude frequency response of Hilbert filter and the filter group of the dashed frame of Fig. 5

$---|t(w)|$; $-\cdot-|\mathrm{T}(w)|$; —— $|\mathrm{U}(w)|$; …… $|g(w)|$.

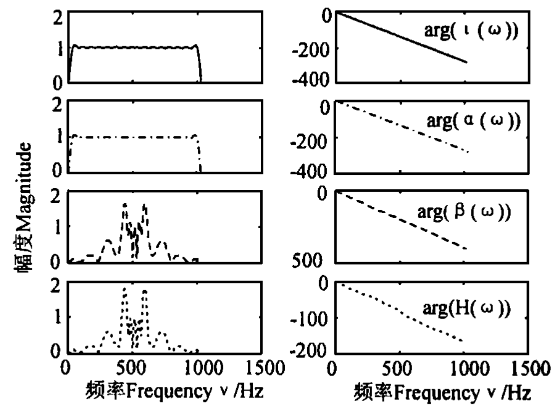

图7 4组滤波器的幅相响应

Fig. 7 Magnitude response of the filter group of the dashed frame in Fig. 5

$---|t(w)|$; $-\cdot-|\mathrm{T}(w)|$; —— $|\mathrm{U}(w)|$; …… $|g(w)|$.

本文考虑的出发点是在小波零点数足够多且分解层数较少时,可以忽略子带窜扰的影响.这点将在下面的实验中得到证实.

4 多层的情形

我们将以上的想法推广到多层情形.在多层的情形下,所要做的即是依图5把 $T(z)$ 继续向下分解.这里我们将考虑在忽略道间窜扰的情形下,即忽略 $B(z), \Gamma(z)$,算法流程如下.

(a) 希尔伯特滤波器→ $H(n)$;

(b) 从1到最大分解层数 n_{max} 做以下循环:

(i) 对输入信号 x 做 DWT 得到细节分量→ x,得到细节分量 d;

(ii) 依图5先计算 $\mathrm{T}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{V}(n)$,计算 $t(n) \rightarrow H(n)$;

(iii) $d^* \mathrm{T} + x^* \mathrm{V} \rightarrow d$,如果是最大层数,则 $x^* t \rightarrow x$;

(c) 按 Mallat 算法重构.

注意到,我们在以上算法中忽略了 $\mathrm{U}(n)$ 的影响,

在后面的实验中可以看到，在分解层数不多的时候，U(n)的忽略对结果影响不大.

5 实验及应用

在信号处理的一些场合,我们常遇到下面一种模型:

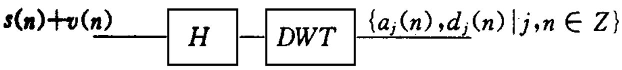

图 8 实验分析模型

Fig. 8 Experimental model

其中 $s(n)+v(n)$ 表示一个被噪声污染的信号，H表示所要做的数字滤波,实验中以 Hilbert滤波器为例，但是我们通常不希望一个原始带噪声的信号直接进行数字滤波,我们更倾向于先去噪,然后再做相应处理.即先将信号变换到小波域,再在小波域中滤波.而非先在时域或频域中做变换，再变换到小波域.

由于图 8中要做 DWT, 很自然地会考虑固有的小波去噪算法，实验中我们即采用先对含噪信号做 DWT,然后去噪,再采用本文提出的算法得到所得的结果.

尽管小波域的分量而非时域信号才是我们关心的内容,但为了对比方便,本文仍采用了重构信号信噪比作为判定标准，输出信噪比定义为:

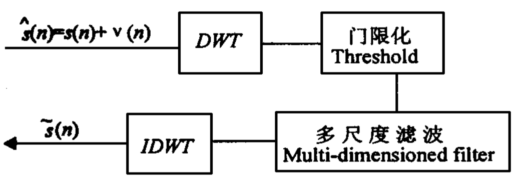

图 9 信噪比及计算实信号 Hilbert变换框

Fig. 9 Detection of signal-noise ratio by the auther's algorithm and the diagram of Hilbert transformation for calculation of real signals

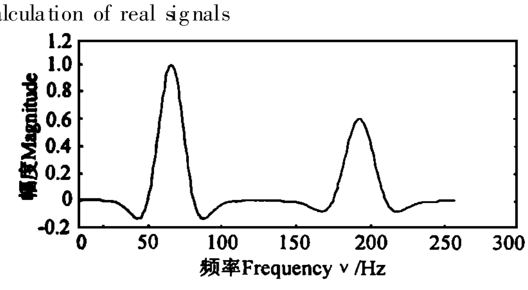

图 10 用于测试原始信号的墨西哥草帽函数

Fig. 10 Maxico straw hat function for the detection of the original signals

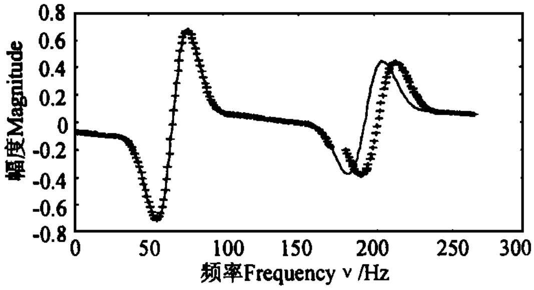

图 11 原信号的 Hilbert变换,频域方法 (实线),小波域方法 （'+'）分解 3层，db30小波

Fig. 11 Hilbert transformation of the original signals By frequency domain (dashed); By Wavelet domain (+), three layers, db 30 wavelet

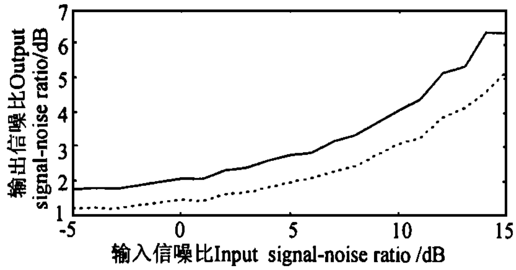

图 12 小波域变换方法与频域变换方法的信噪比对比图

Fig. 12 Comparison of signal-noise ratio between the wavelet domain and the frequency domain

—— 小波变换方法 By the wavelet; …… 频域变换方法 By the frequency.

6 小结

本文讨论了在小波域内实现一个数字滤波器，着重探讨了利用二通道滤波器实现数字滤波器的一般方法，并探讨了各子带间相互窜扰的情况。用 z域方法给出了一个设计方法,以 Hilbert数字滤波器的设计为例,讨论了用抽样率滤波器组实现的算法,同时给出了文献 [1]中算法的一个重要的物理解释及工程背景，在去噪应用中取得良好的结果.

参考文献

1 Beylkin G. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. Siam J Numer Anal, 1992, 6 1716~1740.

2 杨福生.小波变换的工程分析与应用.北京:科学出版社.

3 Vaidyanathan P P. Quadrature mirror filter banks, m-band extensions and perfect-reconstruction techniques. IEEE ASSP Magazine, 1987.

(责任编辑: 黎贞崇)