DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (4): 260~ 261, 265

一个概周期微分方程解的存在定理的改进

Improvment of an Existence Theorem for an Almost Periodic Differential Equation

刘丙辰 罗桂烈 李锋杰
Liu Bingchen Luo Guilie Li Fengjie

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路 3号 541004)
(Math.& Comp. Sci. College, Guangxi Normal University, 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 通过 Liapunov函数的方法,改进了有关文献结果,放宽了系统 $dx/dt = f(t,x) + g(t)$ 的概周期解存在、唯一且一致渐近稳定的条件.
关键词 概周期 Liapunov函数 存在唯一 一致渐近稳定.
中图法分类号 O175.12

Abstract Some known results about the equation $dx/dt = f(t,x) + g(t)$ are improved. Wider conditions are obtained for the existence, uniqueness and uniformly asymptotic stability of its almost periodic solution.

Key words almost periodic, Liapunov function, existence and uniqueness, uniformly asymptotic stability

在自然科学和社会科学中,概周期现象较周期现象更为普遍。许多实际问题往往都可以归结为寻求概周期微分方程的概周期解的问题,从而研究概周期解的存在唯一及其稳定性问题。

在研究此类问题中, Liapunov函数发挥了重要的作用。在具体构造 Liapunov函数时,若出现 $\dot{V} \leqslant -C(t)V$ 的情况,则文献[1]中定理 6.4的要求 $\dot{V} \leqslant -CV$不能满足。在本文中,证明了 $\dot{V} \leqslant -C(t)V$的情况也是可行的,并将原定理中关于有界解的要求取消。因此,本文的结果较文献 [1]中定理6.4的条件更弱且应用面更广。

考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t), \tag{1}$$

其中,$f(t,x) \in C(R \times D, R^n)$,$D$为 R^n 中开集或为 R^n 本身,$g(t)$ 为 t的概周期函数 .

系统 (1) 的乘积系统为

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t), \frac{dy}{dt} = f(t,y) + g(t).$$

$f(t,x)$对 $x \in D$关于 t是一致概周期的,记为 $f(t,x) \in$ a.p.$u(D)$.

2001-04-16收稿。

本文主要结果为:

定理 设在系统 (1) 中, $f(t,x) \in$ a.p.$u(D)$, $g(t)$为 t的概周期函数.假定存在 Liapunov函数 $V(t,x,y) \in C(R_+ \times D \times D, R_+)$, $D \subset R^n$ 或 $D \equiv R^n$,满足:

(I) $a(|x - y|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant b(|x - y|)$,其中 $a(r), b(r) \in CIP$, 即连续、递增、正定的函数;

(II) $|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)| \leqslant L[|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|]$. $L > 0$且 L为 const.;

(III) $\dot{V}_{(2)} \leqslant -c(t)V(t,x,y)$,其中 $t \geqslant t_0 > 0$, $c(t)$为连续函数,$c(t) > 0$且$\int_0^{+\infty} c(t)dt = +\infty$,

则系统 (1) 存在唯一且一致渐近稳定的概周期解 $p(t)$,且 mod$(p) \subset$ mod(f).特别地,当 $f(t,x)$, $g(t)$ 关于 t以 k为周期,即 $f(t+k,x) = f(t,x)$, $g(t+k) = g(t)$,则解 $p(t)$也是以 k为周期,即 $p(t) = p(t+k)$.

证明 (i) 系统 (1) 在假设条件下,存在有界解 $\varphi(t)$.

反证法 若 $\varphi(t)$为系统(1)的无界解,即不管取多么大的正数 M,存在序列 $\{t_n\}$,不妨设 $t_0 = 0$,当 $n \to +\infty$时,$t_n \to +\infty$,使 $\varphi(t_0) = \varphi(0) < \frac{1}{2}M$, $\varphi(t_1) <$

$\frac{1}{2}M$,存在某个 $k\in N$,有 $Q(t_k)=M$,对 $l\in N$ 且 $l>1$ 时,有 $|Q(t_{k+l})|=2^lM$. 由(III)知,存在 $m\in Z,m>k$,使 $b(2M)\exp(-\int_0^{t_m}c(T)\mathrm{d}T)<a(\frac{M}{2})$ 成立.

$V(t_m,Q(t_m),Q(t_{m+1}))\leqslant \exp(-\int_0^{t_m}c(T)\mathrm{d}T)V(0,Q(0),Q(t_1))$,

其中 $V(0,Q(0),Q(t_1))\leqslant b(|Q(0)-Q(t_1)|)\leqslant b(|Q(0)|+|Q(t_1)|)\leqslant b(2M)$,而由 m 的选取知,$V(t_m,Q(t_m),Q(t_{m+1}))\leqslant a(\frac{M}{2})$,由(I)知,所以 $|Q(t_m)-Q(t_{m+1})|\leqslant\frac{M}{2}$ 有 $|Q(t_{m+1})|\leqslant|Q(t_m)|+\frac{M}{2}$ 记 $i=m-k,(m>k)$,则有 $2^{i+1}M=|Q(t_{m+1})|\leqslant|Q(t_m)|+\frac{M}{2}=2^iM+\frac{M}{2}$. 矛盾.

故 $Q(t)$ 有界,即存在 $B=\text{const.}>0$,使 $\forall t\geqslant t_0>0$ 有 $|Q(t)|\leqslant B$ 成立. 证毕.

(ii)$Q(t)$ 为系统(1)的渐近概周期解.

设存在 $f_k\subset R,k\to+\infty,f_k\to+\infty$,记 $Q_k(t)=Q(t)+f_k$,则有 $Q_k(t)$ 为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t+f_k,x)+g(t+f_k)$,过 $(0,Q(f_k))$ 的解,设 S 为 R^n 中任一包含 $Q(t)$ 的紧集,存在 $\{f_k\}$ 的一个子序列,不妨仍用 $\{f_k\}$ 记之,当 $k\to+\infty$ 时,$f(t+f_k,x)+g(t+f_k)$ 在 $R\times S$ 上一致收敛,

对 $\forall X>0$,选取足够大的整数 $k_0=k_0(X)$,使 $m\geqslant k>k_0$ 时,有 $c(t+f_k)>0$ 及 $\exp(-\int_0^{t+f_k}c(f)\mathrm{d}f)b(2B)<\frac{a(X)}{2}$,且在 $R\times S$ 上,$|f(t+f_k,x)-f(t+f_m,x)+g(t+f_k)-g(t+f_m)|<\frac{a(X)}{2L}c(t+f_m)$ 从(II)(III)得,

$\dot{V}_{(2)}(t,Q(t),Q(t+f_k-f_m))\leqslant -c(t)V(t,Q(t),Q(t+f_m-k))+L|f(t+f_m-f_k,Q(t+f_m-f_k))-f(t,Q(t+f_m-f_k))+g(t+f_m-f_k)-g(t)|$,

从而

$\dot{V}|_{(2)}(t,Q(t),Q(t+f_m-f_k))\leqslant -c(t)V(t,Q(t),Q(t+f_m-f_k))+\frac{a(X)c(t+f_k)}{2}$,

即

$V(t+f_k,Q(t+f_k),Q(t+f_m))\leqslant\frac{a(X)}{2}+\exp(-\int_0^{t+f_k}c(f)\mathrm{d}f)V(0,Q(0),Q(f_k)).$

由(I)知,当 $m\geqslant k>k_0$ 时,就有 $V(t+f_k,Q(t+f_m),Q(t+f_k))<2\frac{a(X)}{2}=a(X)$.

又由(I)知,

$$|Q(t+f_m)-Q(t+f_k)|<X,$$

根据文献[1]中定理3.3及引理1,知 $Q(t)$ 为渐近概周期的,不妨设 $p(t)$ 为 $Q(t)$ 的概周期部分,则 $p(t)$ 应为系统(1)的概周期解($t\gg 0$). 证毕.

(iii)$Q(t)$ 为存在唯一的渐近概周期解,即证 $p(t)$ 为存在唯一的.

若 $j(t)$ 也为系统(1)的渐近概周期解,则存在 $t_0>0$,当 $t>t_0$ 时,存在 $c(t)>0$ 使 $V_1(t,Q(t),j(t))\leqslant -c(t)V(t,Q(t),j(t))\leqslant 0$,当 t 适当大之后,有 $V(t,Q(t),j(t))\leqslant V(t_0,Q(t_0),j(t_0))\exp(-\int_{t_0}^{t}c(f)\mathrm{d}f)$,对 $\forall X>0$,使 $V(t,Q(t),j(t))<a(X)$,即 $|Q(t)-j(t)|<X$,则有

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=j(t). \qquad (2)$$

由渐近概周期解的分解式的存在唯一性,知 $Q(t)=p(t)+q(t)$,$j(t)=r(t)+s(t)$,其中,$r(t)$ 为概周期部分,由(2)式和文献[1]定理3.1,得 $Q(t)\equiv j(t)$ 即 $Q(t)$ 存在唯一,即 $p(t)$ 存在唯一.

再由 Yoshizawa 在文献[2]中定理17.2知,$\mathrm{mod}(p)\subset\mathrm{mod}(f)$. 证毕.

(iv)$p(t)$ 为的一致渐近稳定的,即证 $p(t)$ 为系统(1)一致稳定且一致吸引的概周期解.

设 $x(t)$ 为系统(1)的其他任一解,$x(t)=x(t;t_0,x_0)$,对 $\forall X>0$,存在 $W>0$,$b(W)<a(X)$,对 $t\geqslant t_0\geqslant 0$,只要 $|x(t_0)-p(t_0)|<W$,便有 $|x(t;t_0,x_0)-p(t)|<X$ 成立. 由已知定理条件知,当 $t\geqslant t_0$ 时,$V(t,x(t),p(t))\leqslant V(t_0,x(t_0),p(t_0))$ 由(I)知

$a(|x(t)-p(t)|)\leqslant V(t,x(t),p(t))\leqslant V(t_0,x(t_0),p(t_0))\leqslant b(|x(t_0)-p(t_0)|)\leqslant b(W)<a(X)$,所以 $|x(t)-p(t)|<X$,

对于 $X>0$,存在充分大的 $T(r,X)>0$,$r=r(X)>0$,$b(r)<a(X)$,当 $t\geqslant t_0+T(r,X)$ 时,只要 $|x(t_0)-p(t_0)|<r$,$t\geqslant t_0+T(r,X)$ 时,便有 $|x(t)-p(t)|<X$,由上述两点证明可得 $p(t)$ 为一致渐近稳定的. 证毕.

综上所证,定理结论成立. 对周期情况显然成立.

实例 考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(-2+\cos t+\cos\sqrt{2}t)x+(\sin t+\sin\sqrt{2}t)$$
$$=f(t,x)+g(t), \qquad (3)$$

其中,$(-2+\cos t+\cos\sqrt{2}t)$,$(\sin t+\sin\sqrt{2}t)$ 为概周期的,$t\in R$,则 $(-2+\cos t+\cos\sqrt{2}t)x$ 为一致概周期的,系统(3)之相伴系统为

(下转第265 Continue on page 265)

5 乐安波. 带边界条件的二元样条函数空间. 计算数学, 1990, 12 (1): 42~ 46.

6 Morsche H G. Periodic bivariate cubic splines on type-1 triangulation. In: Approximation Theory, 1986, 487~ 490.

7 沙震, 宣培才. (II) 型三角剖分上三次双周期样条的插值于逼近. 计算数学, 1988, 10 (3): 253~ 256.

8 刘焕文. 双周期样条函数空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的代数结构. 高等学校计算数学学报, 1990, 12 (4): 335~ 341.

9 刘焕文. 双周期样条函数空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$. 湘潭大学 (自然科学) 学报, 1990, 12 (1): 19~ 26.

10 刘焕文. 双周期二次样条的插值逼近. 计算数学, 1992, 14 (2): 152~ 156.

11 Liu H W. The double periodic spline space $\tilde{S}_k^1(\triangle_{mn}^{(1)})$ with degree $k \geqslant 4$ on type-1 triangulation. CALCOLO, 1992, 29 (3~ 4): 269~ 289.

12 刘焕文. 四方向网上二次双周期样条的插值逼近. 高等学校计算数学学报, 1993, 15 (3): 195~ 206.

13 刘焕文, 舒适. 非均匀 (II) 型三角剖分下双周期二次样条空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$. 广西科学, 1996, 3 (3): 8~ 11.

14 朱功勤, 刘晓雁, 王寿城. $S_2^{1,1}(\triangle_2^*, R)$ 的 B 样条基及插值. 合肥工业大学学报, 1987, 9 (5): 30~ 35.

15 Wang R H. The dimension and basis of spaces of multivariate splines. J Comput Appl Math, 1985, 12 (1): 163~ 167.

16 王仁宏, 路游. 关于非均匀剖分下多元样条空间 $S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的拟插值算子. 高等学校计算数学学报, 1999, 21 (2): 97~ 103.

17 Varge R S. Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 261页 Continue from page 261)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t), \frac{dy}{dt} = f(t,y) + g(t). \quad (4)$$

作 $V(t,x,y) = \frac{(x-y)^2}{2}$, 下面验证本文定理条件:

(I) $\frac{(\|x-y\|^2)}{4} = a(\|x-y\|) \leqslant \frac{(\|x-y\|^2)}{2} \leqslant b(\|x-y\|) = (x-y)^2$;

(II) $\forall D = \{x \mid x \in R, \|x\| < B^*, B^*$ 为 const., $B^* > 0\}$,

$\|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)\| \leqslant 2B^* [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|]$;

(III) $\dot{V}_{(4)} = (x-y)(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}) = (x-y)^2(-2 + \cos t + \cos\sqrt{2}t)$, 记 $c(t) = 2 - \cos t - \cos\sqrt{2}t > 0$, 存在 $\{T_n\} \subset R$, 使 $c(T_n) \to 0, \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 且 $\int_{t_0}^{+\infty} c(t)dt = +\infty$.

由本文定理可知系统 (3) 存在唯一一致渐近稳定的概周期解而原定理不能解决.

参考文献

1 何崇佑. 概周期微分方程, 北京: 高等教育出版社. 1984.

2 Yoshizawa T. Stability Theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. Berlin: Spring-Verlag. 1975.

(责任编辑: 黎贞崇)

碳沉降无法遏制全球变暖

科学家对近20年来地球陆地生态系统的碳排放与吸收情况进行研究之后认为, 所谓的“碳沉降”效应可能只是暂时的, 不能依靠它来长期遏制全球变暖。

来自欧洲和美国等多个地区的30名科学家在11月8日出版的英国《自然》杂志上说, 地球植被的碳沉降效果并不稳定, 大气中二氧化碳和氧气含量的数据证实, 陆地生物圈在20世纪80年代期间吸收和排放的二氧化碳数量基本相当, 没有出现碳沉降, 20世纪90年代则有一定的沉降效果。

数据表明, 20世纪90年代的碳沉降效应主要出现在北半球的非热带地区, 包括北美、中国、欧洲等。科学家认为, 出现碳沉降的主要原因可能是上述地区的退耕还林。科学家说, 大气中二氧化碳浓度升高, 可以提高植物生长速度, 从而吸收更多的碳, 暂时增强碳沉降效果, 但这一效应终将达到饱和。

(摘自《科学时报》)