DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (4): 262~265

带边界条件样条函数空间 $S_2^{1,1}$ ($\triangle_{mn}^{(2)}$) 上的 Lagrange插值*

Lagrange Interpolation of Bivariate Quadratic Splines $S_2^{1,1}$ ($\triangle_{mn}^{(2)}$) with Boundary Conditions

黄永中　　刘焕文
Huang Yongzhong　　Liu Huanwen

(广西民族学院数学与计算机科学系　南宁市西乡塘　530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要　讨论非均匀 (II) 型三角剖分 $\triangle_{mn}^{(2)}$ 上二元二次样条空间的带边界条件子空间 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$ 上的一类所谓支集中心型的 Lagrange插值. 运用矩阵方向图技术, 证明当 $\triangle_{mn}^{(2)}$ 满足所谓非降比剖分条件时相应的插值问题适定, 在此条件下, 得到插值函数的 Lagrange型表示.

关键词　非均匀 (II) 型三角剖分　二元二次样条　边界条件　支集中心插值
中图法分类号　O241.3

Abstract　A kind of Lagrange interpolation by bivariate quadratic splines with boundary conditions over non-uniform type-II triangulation, called the interpolation to the center of the support of splines, is discussed. By using the oriented graphic technique of matrix, the existence and the uniqueness of the interpolation are obtained for a special triangulation. Furthermore, the representation of the interpolation function is given.

Key words　non-uniform type-II triangulation, bivariate quadratic splines, boundary conditions, interpolation to the center of the support

多元样条函数空间及其带边界条件的子空间在力学计算、计算机辅助设计 (CAD)、散乱数据插值和偏微分方程数值解等方面具有广泛的应用. 关于带边界条件的二元样条子空间的研究最早始于 Chui和 Schumaker[1]. 同年, Chui, Schumaker和 Wang在文献 [2]和文献 [3]中分别给出了 (I) 型三角剖分下二元三次 C^1样条空间和 (II) 型三角剖分下二元二次 C^1样条空间的带边界条件子空间的维数与基底. 1983年王仁宏与何天晓在文献 [4]中给出了非均匀 (II) 型三角剖分下二元二次 C^1 样条空间的带边界条件子空间的维数与基底. 乐安波在文献 [5]则给出了均匀 (II) 型三角剖分下二元 d 次 ($d\geqslant 4$) 和 (I) 型三角剖分下二元 d次 ($d\geqslant 3$) C^1 样条空间的带边界条件子空间的维数与基底. 关于带双周期边界条件的二元样条空间的代数结构及插值逼近的研究见文献 [6~13].

对非均匀 (II) 型三角剖分, 文献 [14]讨论了带零边值条件的二元二次样条的支集偏心插值. 本文则致力于讨论其支集中心插值, 并得到了适定性条件和插值函数的 Lagrange型表示.

1　二元样条函数空间 $S_2^{1,1}$ ($\triangle_{mn}^{(2)}$)

记矩形 $K=[x_0, x_{m+1}]\otimes[y_0, y_{n+1}]$, 直线 $x=x_i$, $y=y_j$, $i=1, 2, \cdots, m$, $j=1, 2, \cdots, n$, 将 K分成 $(m+1)(n+1)$ 个小矩形. 连接每个小矩形的两条对角线, 则得到 K的非均匀 (II) 型三角剖分 $\triangle_{mn}^{(2)}$, 见文献 [16]中的图 1.

二元二次 C^1样条函数空间 $S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 由满足以下条件的样条函数 $s(x, y)$ 组成:

i) $s(x, y)\in C^1(K)$;

ii) 在$\triangle_{mn}^{(2)}$的每一三角形单元上, $s(x, y)$ 是关于 x, y的二次完全多项式.

再引入空间 $S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的带边界条件的子空间 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$, 它由满足以下条件的 $s(x, y)$ 组成:

i) $s(x, y)\in S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$;

2001-05-10收稿.
* 广西教育厅留学回国人员基金资助课题, 广西民族学院重点项目资助课题.

ii) $s(x,y)|_{\partial K}=\dfrac{\partial s(x,y)}{\partial n}|_{\partial K}=0$,

其中 $\boldsymbol{n}$ 为边界 ∂K 的外法线方向单位向量。

由文献[15]知

$$\dim S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})=(m-1)(n-1), \qquad (1)$$

且 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的一组 B 样条基是 $\{B_{ij}\}$, $i=2,\cdots,m$, $j=2,\cdots,n$, 而 $B_{ij}(x,y)$ 是具文献[16]中图2(亦见献[13]中图1)所示八边形支集的二元二次分片多项式,其中, $h_i=5x_i$, $k_j=5y_j$, $A_i=h_i/(h_i+h_{i+1})$, $A_i'=1-A_i$, $B_j=k_j/(k_j+k_{j+1})$, $B_j'=1-B_j$。以后记此八边形支集为 G_{ij}。

2 一般插值问题的适定性

引入记号 $\Lambda=\{(i,j): i=2,3,\cdots,m;\ j=2,3,\cdots,n\}$, 而 L_{ij} 是一组点值泛函:

$$L_{ij}f=f(u_i,v_j),\ (u_i,v_j)\in K,\ (i,j)\in\Lambda.$$

考虑 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$ 上的一般插值问题: 求 $s(x,y)$ 使满足条件

$$\begin{cases} s(x,y)=\sum_{(i,j)\in\Lambda} c_{ij}B_{ij}(x,y), \\ L_{ij}s=L_{ij}f, \quad (i,j)\in\Lambda. \end{cases} \qquad (2)$$

关于此插值问题的适定性,我们得到了下面的两个定理。

定理1 若插值问题(2)适定,则插值结点组 $\{(u_i,v_j)\}$ 应满足条件:

$$(u_i,v_j)\in G_{ij},\ (i,j)\in\Lambda. \qquad (3)$$

定理2 若插值点组 $\{(u_i,v_j)\}$ 满足如下分布: $(u_i,v_j)\in G_{ij}-G_{ij}\cap(G_{i-1,j}\cup G_{i,j-1}\cup G_{i+1,j-1})$, 则插值问题(2)适定。

我们仅证明定理1。

证明 反证法 设有 $(i_0,j_0)\in\Lambda$, 使得对 $\forall(u_i,v_j)$, $(u_i,v_j)\notin G_{i_0j_0}$, 则有

$$B_{i_0j_0}(x_p,y_p)=0,\ (p,q)\in\Lambda. \qquad (4)$$

因此,由条件(2)导出的用于确定线性组合

$$s(x,y)=\sum_{(i,j)\in\Lambda} c_{ij}B_{ij}(x,y) \qquad (5)$$

中的系数 c_{ij} 的线性方程组

$$\sum_{(i,j)\in\Lambda} c_{ij}B_{ij}(x_p,y_q)=f(x_p,y_q),\ (p,q)\in\Lambda \qquad (6)$$

的系数矩阵中第 $(j_0-2)(m-1)+(i_0-1)$ 列的元素全为零。故线性方程组的解不唯一存在,这与假设矛盾,定理证毕.

注: 此处,定理1是插值问题(2)适定的一个必要条件而非充分条件,而定理2则是插值问题(2)适定的充分条件而非必要条件。下面,对某类具体插值问题的更加精确细致的分析,可以使我们获得更精确的结果。

3 支集中心插值

以后总设被插函数 $f(x,y)$ 满足边界条件:

$$f(x,y)|_{\partial K}=D_xf(x,y)|_{\partial K}=D_yf(x,y)|_{\partial K}=0. \qquad (7)$$

考虑 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的所谓支集中心插值: 求 $s(x,y)$ 使满足

$$\begin{cases} s(x,y)=\sum_{(i,j)\in\Lambda} c_{ij}B_{ij}(x,y), \\ s(\bar{x}_{i-1},\bar{y}_{j-1})=f(\bar{x}_{i-1},\bar{y}_{j-1}),\ (i,j)\in\Lambda, \end{cases} \qquad (8)$$

其中, $\bar{x}_{i-1}=(x_{i-1}+x_i)/2$, $\bar{y}_{j-1}=(y_{j-1}+y_j)/2$, 因为 $(\bar{x}_{i-1},\bar{y}_{j-1})$ 正好是支集 G_{ij} 的中心,故称支集中心插值。容易看出, $(\bar{x}_{i-1},\bar{y}_{j-1})\notin G_{ij}-G_{ij}\cap(G_{i-1,j}\cup G_{i,j-1}\cup G_{i+1,j-1})$, 故插值问题的适定性不能由定理2保证,我们需要寻求别的途径对此进行讨论。

由于插值条件数为 $(m-1)(n-1)$, 等于 $\dim S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$, 所以要证明插值问题适定,只需证明相应的齐次问题仅有零解,即证明由(8)式导出的关于 $c_{ij}((i,j)\in\Lambda)$ 的方程组的系数矩阵非奇异,以下称此矩阵为插值矩阵。

利用 $B_{ij}(x,y)$ 在 G_{ij} 上的表达式,经过计算可以得到支集中心插值的插值矩阵为

$$E=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} F_2 & G_3 & & & \\ G_3' & F_3 & G_4 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & G_{n-1}' & F_{n-1} & G_n \\ & & & G_n' & F_n \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

其中,

$$F_j=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} D_{2j} & A_3 & & & \\ A_3' & D_{3j} & A_4 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & A_{m-1}' & D_{m-1j} & A_m \\ & & & A_m' & D_{mj} \end{bmatrix},$$

$j=2,3,\cdots n$,

$$G_j=\frac{1}{4}\operatorname{diag}(\underbrace{B_j,B_j,\cdots,B_j}_{m-1}),$$

$$G_j'=\frac{1}{4}\operatorname{diag}(\underbrace{B_j',B_j',\cdots,B_j'}_{m-1}),\ j=3,4,\cdots,n,$$

而 A_i, A_i', B_j, B_j' 的意义如前, $D_{kj}=A_k+A_{k+1}'+B_j+B_{j+1}'$, $k=2,\cdots,m$。

分析以上插值矩阵 E, 我们有如下结论

定理3 如果 K 的非均匀(II)型三角剖分 $\triangle_{mn}^{(2)}$ 为

非降比剖分，即剖分满足条件

$$\frac{h_{i+1}}{h_i}\geqslant\frac{h_i}{h_{i-1}},\ \frac{k_{j+1}}{k_j}\geqslant\frac{k_j}{k_{j-1}},\ (i,\ j)\in\wedge,\qquad(10)$$

则支集中心插值问题 (8) 适定。

为证明此定理，先引进相关概念及引理。

定义 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为一任意 n阶方阵，按下面的方法令它对应于一平面图形：在平面上标出标号为 1，2，…，n的几个不同的点 P_i，对每一个 i和 j $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$，如果 $a_{ij}\neq 0$，则有向线段$\overrightarrow{P_iP_j}$连结点 P_i和 P_j，如果 $a_{ij}\neq 0$且 $a_{ji}\neq 0$，则从 P_i到 P_j，从 P_j到 P_i各作一有向线段，如果 $a_{ii}\neq 0$，则作一条起于 P_i止于 P_i的环绕着点 P_i的闭路方向线。这样得到的平面有向图称为 A的方向图，记为 $G(A)$。

定义 2 在矩阵的方向图 $G(A)$中，若对任意 $i\neq j$，都可以沿方向线从点 P_i出发间接或直接地到达点 P_j，则称 $G(A)$是连通的，否则称为不连通。

引理 1[17] n阶矩阵 A为可约的当且仅当 $n>1$，且具有不连通方向图 $G(A)$。

定理 3的证明 易知 A_i，B_j，A'_i，B'_j均大于零，而 $D_{kj}=A_k+A'_{k+1}+B_j+B'_{j+1}$也大于零，所以支集中心插值问题的插值矩阵 E的 3条对角线上的元素全大于零，所以 $G(E)$是连通的，故由引理 1知，E不可约。另一方面，由$\triangle^{(2)}_{mn}$为非降比剖分，所以对 E的每一行来说，都有

$$(A_i+A'_{i+1}+B_j+B'_{j+1})-(A'_i+A_{i+1})-(B'_j+B_{j+1})=\frac{2(h_{i-1}h_{i+1}-h_i^2)}{(h_i+h_{i+1})(h_{i-1}+h_i)}+\frac{2(k_{j-1}k_{j+1}-k_j^2)}{(k_j+k_{j+1})(k_{j-1}+k_j)}=$$

$$\frac{2h_ih_{i-1}}{(h_i+h_{i+1})(h_{i-1}+h_i)}\left(\frac{h_{i+1}}{h_i}-\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)+\frac{2k_jk_{j-1}}{(k_j+k_{j+1})(k_{j-1}+k_j)}\left(\frac{k_{j+1}}{k_j}-\frac{k_j}{k_{j-1}}\right)\geqslant 0,\qquad(11)$$

且对 E的第一行来说，有

$$A_2+A'_3+B_2+B'_3-A_3-B_3=A'_2+B'_2+(A_2+A'_3+B_2+B'_3)-(A'_2+A_3)-(B'_2+B_3)\geqslant A'_2+B'_2>0,\qquad(12)$$

故矩阵 E为行弱对角占优矩阵，非奇异。即我们证明了在$\triangle^{(2)}_{mn}$为非降比剖分的条件下 $S^{1,1}_2(\triangle^{(2)}_{mn})$的支集中心插值问题适定。

4 插值函数的解析表示

为了构造支集中心插值的插值函数，先引入 Lagrange基函数。

定义 3 如果 $l_{ij}(x,\ y)\in S^{1,1}_2(\triangle^{(2)}_{mn})$，且满足

$$l_{ij}(\bar{x}_{\alpha-1},\ \bar{y}_{\beta-1})=\triangle_{i\alpha;j\beta}=\triangle_{i\alpha}\times\triangle_{j\beta},\quad(i,\ j),(\alpha,\ \beta)\in\wedge,\qquad(13)$$

其中$\triangle_{i\alpha}$及$\triangle_{j\beta}$均为 Kronecker符号，则称函数组 $\{l_{ij}(x,\ y):(i,\ j)\in\wedge\}$为支集中心插值的 Lagrange基函数。

因为 $l_{ij}(x,\ y)\in S^{1,1}_2(\triangle^{(2)}_{mn})$，故可令

$$l_{ij}=\sum_{(p,q)\in\wedge}C_{pq}B_{pq}(x,\ y),$$

于是条件 (13) 变为

$$\sum_{(p,q)\in\wedge}C_{pq}B_{pq}(\bar{x}_{\alpha-1},\ \bar{y}_{\beta-1})=\triangle_{i\alpha;j\beta},\ (\alpha,\ \beta)\in\wedge.$$

利用 B_{ij}在 G_{ij}上的解析表示，通过计算、化简，可以求得此方程组的解为

$$C=E^{-1}E_{ij},$$

其中 E为支集中心插值矩阵 (9)，而

$$C=(c_{22},c_{32},\cdots,c_{m2};\ c_{23},c_{33},\cdots,c_{m3};\ \cdots;\ c_{2n},c_{3n},\cdots,c_{mn})^T,$$

$$E_{ij}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(j-2)(m-1)};\ \underbrace{0,\cdots,0}_{(i-2)},\ 1;\ \underbrace{0,\cdots,0}_{(m-i-1)};\ \underbrace{0,\cdots,0}_{(n-j)(m-1)})^T.\qquad(14)$$

于是 Lagrange基函数为

$$l_{ij}=C^TB=E^T_{ij}(E^{-1})^TB,$$

其中，

$$B=(B_{22}(x,\ y),\cdots,B_{m2}(x,\ y);\ B_{23}(x,\ y),B_{33}(x,\ y),\cdots,B_{m3}(x,\ y);\ \cdots;\ B_{2n}(x,\ y),B_{3n}(x,\ y),\cdots,B_{mn}(x,\ y))^T.\qquad(15)$$

利用以上求出的 Lagrange基函数，在$\triangle^{(2)}_{mn}$为非降比剖分的条件下，支集中心的插值函数立即可表为：

$$s(x,\ y)=\sum_{(i,j)\in\wedge}f(\bar{x}_{i-1},\ \bar{y}_{j-1})E^T_{ij}(E^{-1})^TB.$$

参考文献

1 Chui C K, Schumaker L L. On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions I Rectangles. In: Schempp W, Zeller K et al.. Multivariate Approximation Theory Ⅱ. Birkhauser, Basel, 1982. 69~80.

2 Chui C K, Schumaker L L, Wang R H. On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions II Type-1 triangulations. In: Second Edmonton Conference on Approximation Theory, CMS Conference Proceedings, 1982, 3: 51~66.

3 Chui C K, Schumaker L L, Wang R H. On spaces of piecewise polynomials with boundary condition III Type-2 triangulations. In: Second Edmonton Conference on Approximation Theory, CMS Conference Proceedings, 1982, (3): 67~80.

4 王仁宏，何天晓. 不均匀第二型三角剖分下的带有边界条件的样条函数空间. 科学通报，1985，9 (4): 249~251.

5 乐安波．带边界条件的二元样条函数空间．计算数学，1990，12（1）：42～46.

6 Morsche H G. Periodic bivariate cubic splines on type-1 triangulation. In：Approximation Theory，1986，487～490.

7 沙震，宣培才．（II）型三角剖分上三次双周期样条的插值于逼近．计算数学，1988，10（3）：253～256.

8 刘焕文．双周期样条函数空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的代数结构．高等学校计算数学学报，1990，12（4）：335～341.

9 刘焕文．双周期样条函数空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$．湘潭大学（自然科学）学报，1990，12（1）：19～26.

10 刘焕文．双周期二次样条的插值逼近．计算数学，1992，14（2）：152～156.

11 Liu H W. The double periodic spline space $\tilde{S}_k^1(\triangle_{mn}^{(1)})$ with degree $k \geqslant 4$ on type-1 triangulation. CALCOLO，1992，29（3～4）：269～289.

12 刘焕文．四方向网上二次双周期样条的插值逼近．高等学校计算数学学报，1993，15（3）：195～206.

13 刘焕文，舒适．非均匀（II）型三角剖分下双周期二次样条空间 $\tilde{S}_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$．广西科学，1996，3（3）：8～11.

14 朱功勤，刘晓雁，王寿城．$S_2^{1,1}(\triangle_2^*, R)$ 的 B 样条基及插值．合肥工业大学学报，1987，9（5）：30～35.

15 Wang R H. The dimension and basis of spaces of multivariate splines. J Comput Appl Math，1985，12（1）：163～167.

16 王仁宏，路游．关于非均匀剖分下多元样条空间 $S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})$ 的拟插值算子．高等学校计算数学学报，1999，21（2）：97～103.

17 Varge R S. Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall，Englewood Cliffs，New Jersey，1962.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第261页 Continue from page 261）

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + g(t), \frac{dy}{dt} = f(t,y) + g(t). \quad (4)$$

作 $V(t,x,y) = \frac{(x-y)^2}{2}$，下面验证本文定理条件：

（I）$\frac{(\|x-y\|^2)}{4} = a(\|x-y\|) \leqslant \frac{(\|x-y\|^2)}{2} \leqslant b(\|x-y\|) = (x-y)^2$；

（II）$\forall D = \{x \mid x \in R, \|x\| < B^*, B^*$ 为 const.，$B^* > 0\}$，

$\|V(t,x_1,y_1) - V(t,x_2,y_2)\| \leqslant 2B^* [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|]$；

（III）$\dot{V}_{(4)} = (x-y)(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}) = (x-y)^2(-2 + \cos t + \cos\sqrt{2}t)$，记 $c(t) = 2 - \cos t - \cos\sqrt{2}t > 0$，存在 $\{T_n\} \subset R$，使 $c(T_n) \to 0, \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0$ 且 $\int_{t_0}^{+\infty} c(t)dt = +\infty$.

由本文定理可知系统（3）存在唯一一致渐近稳定的概周期解而原定理不能解决.

参考文献

1 何崇佑．概周期微分方程，北京：高等教育出版社．1984.

2 Yoshizawa T. Stability Theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. Berlin：Spring-Verlag. 1975.

（责任编辑：黎贞崇）

碳沉降无法遏制全球变暖

科学家对近20年来地球陆地生态系统的碳排放与吸收情况进行研究之后认为，所谓的“碳沉降”效应可能只是暂时的，不能依靠它来长期遏制全球变暖。

来自欧洲和美国等多个地区的30名科学家在11月8日出版的英国《自然》杂志上说，地球植被的碳沉降效果并不稳定，大气中二氧化碳和氧气含量的数据证实，陆地生物圈在20世纪80年代期间吸收和排放的二氧化碳数量基本相当，没有出现碳沉降，20世纪90年代则有一定的沉降效果。

数据表明，20世纪90年代的碳沉降效应主要出现在北半球的非热带地区，包括北美、中国、欧洲等。科学家认为，出现碳沉降的主要原因可能是上述地区的退耕还林。科学家说，大气中二氧化碳浓度升高，可以提高植物生长速度，从而吸收更多的碳，暂时增强碳沉降效果，但这一效应终将达到饱和。

（摘自《科学时报》）