DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.04.009
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (4): 274～278

最优化问题一个强收敛的强次可行方向法*

A Strongly Subfeasible Directions Method with Strong Convergence for Optimization Problems

黎健玲
Li Jianling

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路10号 530004)
(Dept. of Math.& Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 讨论非线性等式与不等式约束最优化,用广义投影技术和强次可行方向法思想,建立一个初始点任意的新算法.该算法不仅具有全局收敛性,且搜索方向是强次可行下降的,从而得出更好的强收敛性.

关键词 等式与不等式约束 最优化 广义投影 强次可行方向法 全局收敛性 强收敛性
中图法分类号 O 221.2

Abstract Nonlinear equality and inequality constrained optimization is discussed, a new algorithm with arbitrary initial is presented by using the generalized projection technique and the idea of strongly subfeasible directions method. This algorithm possesses global convergence and the search directions are strongly subfeasible descent directions. Furthermore, better strong convergence is arrived.

Key words equality and inequality constraints, optimization, generalized projection, strongly subfeasible directions method, global convergence, strong convergence

近20年,序列二次规划方法得到许多学者进一步深入的研究,取得了一定的成果[1～6],这些方法在不要求二次子规划的系数矩阵一致正定的条件下,有限步迭代中都必须计算具有全局收敛性的辅助可行下降方向,同时为了保证算法是强收敛的,辅助方向应满足“一阶”下降性 (其定义和性质见文献 [1, 3]),而现有的可行方向法多数无此性质.文献 [7]中算法通过解线性规划产生“一阶”方向,文献 [6, 8]分别采用转轴运算下的两次投影方法和解3个线性方程组的技巧计算“一阶”方向,因而这些方法计算量仍较大;另外,初始点必须可行的要求使得可行下降类算法为此增加辅助程序和计算量.文献 [9, 10]建立了纯不等式约束最优化的强收敛算法.基于以上原因,借助于文献 [9～12]思想,本文构造一般非线性约束优化的一个具有简单显式结构、计算量相对小的全局收敛新算法,其搜索方向具有强次可行下降性,在适当假设下,算法是强收敛的.另一特点是该算法的初始点是任意的,迭代中可行度集 $L_2^-(x^k)=\{j|\,g_j(x^k)\leqslant 0\}$单调不减,即 $L_2^-(x^k)\subseteq L_2^-(x^{k+1})$,称之为强次可行方向法[11].

1 算法

本文讨论下面等式与不等式约束优化问题:

$$\text{(P)}\quad \begin{aligned} &\min\ f(x)\\ &\text{s. t. } g_j(x)=0,\ j\in L_1=\{1,\cdots,m\},\\ &g_j(x)\leqslant 0,\ j\in L_2=\{m+1,\cdots,m+l\}.\end{aligned}$$

构造辅助问题如下:

$$(\text{AP}_c)\quad \min\ F_c(x)=f(x)+c\sum_{j\in L_1}|g_j(x)|$$
$$\text{s. t. } g_j(x)\leqslant 0,\ j\in L_2.$$

记问题 (P)和问题 (AP_c)的可行集分别为 X和 X_0, $L=L_1\cup L_2$.

$$L_2^-(x)=\{j\in L_2|\,g_j(x)\leqslant 0\},\ L_2^+(x)=\{j\in L_2|\,g_j(x)>0\},\tag{1}$$

$$h(x)=\max\{0,g_j(x),j\in L_2\}=\max\{0,g_j(x),j\in L_2^+(x)\},\ H(x)=\sum_{j\in L_1}|g_j(x)|.\tag{2}$$

2000-12-25收稿, 2001-10-04修回。
* 国家自然科学基金 (19801009)、广西自然科学基金 (9811023, 9912027) 和广西“十百千人才工程” (99214) 基金资助项目。

对参数 $p>0$,记

$D_j(x)=0, j\in L_1, D_j=|g_j(x)|^p, j\in L_2^-(x), D_j(x)=|h(x)-g_j(x)|^p, j\in L_2^+(x)$. (3)

假设 1 $f, g_j\in C^1, j\in L$,向量组 $\{\nabla g_j(x)|D_j(x)=0\}$ 线性无关.

为便于讨论,记

$A(x)=(\nabla g_j(x), j\in L), D(x)=\mathrm{diag}(D_j(x), j\in L), Q(x)=(A(x)^TA(x)+D(x))^{-1}A(x)^T$, (4)

$c(x)=(c_j(x), j\in L)=-Q(x)\nabla f(x), P(x)=E-A(x)Q(x)$, (5)

$L_{21}^-(x)=\{j\in L_2^-(x)|g_j(x)=0\}, L_{21}^+(x)=\{j\in L_2^+(x)|h(x)=g_j(x)\}$. (6)

引理 1 设假设 1成立,则对任意满足 $G_j\geqslant 0(\forall j\in L)$ 及 $G_j>0(\forall j\in L_{21}^-(x)\cup L_{21}^+(x))$ 的对角阵 $G=\mathrm{diag}(G_j, j\in L)$,矩阵 $(A(x)^TA(x)+G)$ 是正定阵,从而矩阵 $(A(x)^TA(x)+D(x))$ 正定,而且有:

$$\nabla f(x)^TP(x)\nabla f(x)=\|P(x)\nabla f(x)\|^2+\sum_{j\in L}c_j(x)^2D_j(x), \quad (7)$$

$A(x)^TP(x)=D(x)Q(x), A(x)^TQ(x)^T=E-D(x)(A(x)^TA(x)+D(x))^{-1}$. (8)

引理 2 点 $x\in R^n$ 为问题(P)的 K-T点当且仅当

$$P(x)\nabla f(x)=0, c_j(x)\geqslant 0, (j\in L_2), h(x)=0. \quad (9)$$

引理 1, 2的证明类似于文献[12]中的引理 1, 2,从略.

对固定的罚参数 c,定义 $F_c(x)$ 沿方向 $d\in E^n$ 的方向导数为:

$$DF_c(x;d)=\lim_{\lambda\to 0^+}(F_c(x+\lambda d)-F_c(x))/\lambda. \quad (10)$$

引理 3 对任意方向 d,有:

$$DF_c(x;d)=\nabla f(x)^Td+c\{\sum_{g_j>0, j\in L_1}\nabla g_j(x)^Td-\sum_{g_j<0, j\in L_1}\nabla g_j(x)^Td+\sum_{g_j=0, j\in L_1}|\nabla g_j(x)^Tg|\}. \quad (11)$$

由 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 的定义可直接推出以下式子:

$$y^TP(x)y=\|P(x)y\|^2+\sum_{j\in L}D_j(x)Z_j^2, Z\triangleq Q(x)y, \forall y\in R^n. \quad (12)$$

令 $e=(1,1,\cdots,1)^T\in R^{m+l}$ 及

$T(x)=\sum_{j\in L_2}\min\{0, c_j(x)\}, U(x)=\sum_{j\in L_2}|c_j(x)|, f(x)=-\|P(x)\nabla f(x)\|^2+T(x)-H(x)$, (13)

$$d(x)=\frac{\|P(x)\nabla f(x)\|^2-T(x)+H(x)+h(x)}{1+2U(x)}, \quad (14)$$

构造搜索方向如下:

$q_1(x)=-P(x)\nabla f(x)+Q(x)^TV(x), q(x)=d(x)^eq_1(x), e>0$; (15)

其中

$$v_j(x)=\begin{cases}D_j(x)-d(x), j\in L_2 \text{且} c_j(x)\geqslant 0;\\ -1-d(x), j\in L_2 \text{且} c_j(x)<0;\\ -g_j(x), j\in L_1.\end{cases} \quad (16)$$

引理 4 (I) $x\in R^n$ 为问题(P)的 K-T点当且仅当 $d(x)=0$;

(II) 设 $c\geqslant|c_j(x)|+1, (\forall j\in L_1)$,则有:

$\nabla g_j(x)^Tq_1(x)\leqslant -d(x), (\forall j\in L_{21}^+(x)\cup L_{21}^-(x))$,

$DF_c(x;q_1(x))\leqslant 0.5h(x)-0.5d(x)$, (17)

$\nabla g_j(x)^Tq(x)\leqslant -d(x)^{1+e}, (\forall j\in L_{21}^+(x)\cup L_{21}^-(x)), DF_c(x;q(x))\leqslant 0.5h(x)d(x)^e-0.5d(x)^{1+e}$. (18)

证明 利用引理 2及 $d(x)$ 的定义易证(I)成立.由(4)及(5)可知:

$A(x)^TP(x)\nabla f(x)=(A(x)^T-A(x)^TA(x)Q(x))\nabla f(x)=D(x)Q(x)\nabla f(x)=-D(x)c(x)$, (19)

由上式及(13)式知:

$A(x)^Tq_1(x)=D(x)c(x)+[E-D(x)(A(x)^TA(x)+D(x))^{-1}]V(x)$
$=D(x)c(x)+V(x)-D(x)(A(x)^TA(x)+D(x))^{-1}V(x)$, (20)

当 $j\in L_{21}^+(x)\cup L_{21}^-(x)$ 时,$D_j(x)=0$,故由上式知 $\nabla g_j(x)^Tq_1(x)=v_j(x)$,

于是由(16)式立得: $\nabla g_j(x)^Tq_1(x)\leqslant -d(x), \forall j\in L_{21}^+(x)\cup L_{21}^-(x)$.

往证: $DF_c(x;q_1(x))\leqslant 0.5h(x)-0.5d(x)$,因 $D_j(x)=0, \forall j\in L_1$,故由(20)式知

$$\nabla g_j(x)^Tq_1(x)=v_j(x)=-g_j(x), \forall j\in L_1.$$

记 $\sum^+=\sum_{j\in L_1, g_j>0}$, $\sum^-=\sum_{j\in L_1, g_j<0}$,由引理 3及(12)式有

$$\begin{aligned}&DF_c(x;q_1(x))\\ &=-\|P(x)\nabla f(x)\|^2-\sum_{j\in L}D_j(x)Z_j(x)^2+(Q(x)\nabla f(x))^TV(x)+c[\sum^+(-g_j(x))-\sum^-(-g_j(x))]\\ &\leqslant -\|P(x)\nabla f(x)\|^2-\sum_{j\in L}c_j(x)v_j(x)+c[\sum^-g_j(x)-\sum^+g_j(x)]\\ &=-\|P(x)\nabla f(x)\|^2+\sum_{j\in L_2, c_j\geqslant 0}[D_j(x)+\end{aligned}$$

$\mathrm{d}(x)]\mathrm{c}_j(x)+\sum_{j\in L_2,\mathrm{c}_j<0}(1+\mathrm{d}(x))\mathrm{c}_j(x)-\sum^{+}(c-\mathrm{c}_j(x))g_j(x)+\sum^{-}(c+\mathrm{c}_j(x))g_j(x)$
$\leqslant -\|P(x)\nabla f(x)\|^2+\mathrm{d}(x)\mathrm{U}(x)+\mathrm{T}(x)-\mathrm{H}(x)$
$\leqslant 0.5\mathrm{h}(x)-0.5\mathrm{d}(x)$.

由(17)式及(15)式易证(18)式成立．

引理 5 设 $c\geqslant|\mathrm{c}_j(x)|+1(\forall j\in L_1)$,

(Ⅰ)若 $x\in X_0$,但 x 不是(P)的 K-T点,则沿方向 $q(x)$ 有 $DF_c(x;q(x))<0$,且 $q(x)$ 为 X_0 的可行方向．

(Ⅱ)若 $x\notin X_0$,则当 $\lambda>0$ 充分小时有:
$g_j(x+\lambda q(x))\leqslant \mathrm{h}(x)-0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}},\forall j\in L_2^+(x)$; $g_j(x+\lambda q(x))\leqslant 0,\forall j\in L_2^-(x)$.

证明 (Ⅰ)当 $x\in X_0$ 且 x 不是 K-T点时:由引理4(Ⅱ)知:
$DF_c(x;q(x))\leqslant 0.5\mathrm{h}(x)\mathrm{d}(x)-0.5\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}<0$,
$\nabla g_j(x)^{\mathrm{T}}q(x)\leqslant -\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}<0,\forall j\in L_{21}^+(x)\cup L_{21}^-(x)$.

故 $q(x)$ 为可行方向．

(Ⅱ)$\forall j\in L_2^+(x)\backslash L_{21}^+(x)$,有 $g_j(x)<\mathrm{h}(x)$,由 $g_j(x)$ 的连续性知:当 λ 充分小时

$$g_j(x+\lambda q(x))\leqslant \mathrm{h}(x)-0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}},$$

$\forall j\in L_{21}^+(x)$,有:$\mathrm{h}(x)=g_j(x)$,由引理4(Ⅱ)知 $\nabla g_j(x)^{\mathrm{T}}q(x)\leqslant -\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}$,故当 λ 充分小时:
$g_j(x+\lambda q(x))-\mathrm{h}(x)+0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}$
$=\lambda\nabla g_j(x)^{\mathrm{T}}q(x)+0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}+\mathrm{b}(\lambda)$
$\leqslant -\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}+0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}+\mathrm{b}(\lambda)<0$

故 $g_j(x+\lambda q(x))\leqslant \mathrm{h}(x)-0.25\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}$.

$\forall j\in L_2^-(x)\backslash L_{21}^-(x)$,有 $g_j(x)<0$,由 $g_j(x)$ 的连续性知当 λ 充分小时 $g_j(x+\lambda q(x))\leqslant 0$.

$\forall j\in L_{21}^-(x)$,有:$g_j(x)=0$.由引理4(Ⅱ)有:$\nabla g_j(x)^{\mathrm{T}}q(x)\leqslant -\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}$,此时
$g_j(x+\lambda q(x))=\lambda\nabla g_j(x)^{\mathrm{T}}q(x)+\mathrm{b}(\lambda)\leqslant -\lambda\mathrm{d}(x)^{1+\mathrm{e}}+\mathrm{b}(\lambda)\leqslant 0$.

综合即得:$g_j(x+\lambda q(x))\leqslant 0,\forall j\in L_2^-(x)$.

算法 A **步骤 0** 任取初始点 $x^1\in R^n$,$\mathrm{e}>0$,$c_0>1,k=1,\mathrm{U}\in(0,1)$.

步骤 1 对于点 x^k,按(2)~(16)式计算各量,并记 $D_j^k=D_j(x^k)$,$\mathrm{h}_k=\mathrm{h}(x^k)$,$\nabla g_j^k=\nabla g_j(x^k)$,$(q_1^k,q^k)=(q_1(x^k),q(x^k))$,$(A_k,Q_k,P_k,D_k,\mathrm{c}_k,\mathrm{T}_k,\mathrm{U}_k,\mathrm{f}_k,\mathrm{d}_k,V^k)=(A(x^k),Q(x^k),P(x^k),D(x^k),\mathrm{c}(x^k),\mathrm{T}(x^k),\mathrm{U}(x^k),\mathrm{f}(x^k),\mathrm{d}(x^k),V(x^k))$.

步骤 2 如 $\mathrm{d}_k=0$,则 x^k 为问题(P)的 K-T点,停;否则转入步骤3.

步骤 3 调整参数 c 令 $r_k=\max\{|\mathrm{c}_j^k|,j\in L_1\}+1$.如 $r_k>c_{k-1}$,则令 $c_k=\max\{r_k,c_{k-1}+\mathrm{e}\}$,否则令 $c_k=c_{k-1}$.

步骤 4 作线搜索．求 $\{1,\mathrm{U},\mathrm{U}^2,\cdots\}$ 中满足以下不等式的最大值 λ_k:

$$F_{c_k}(x^k+\lambda q^k)\leqslant F_{c_k}(x^k)-0.25\lambda\mathrm{d}_k^{1+\mathrm{e}}+0.5\lambda\mathrm{h}_k\mathrm{d}_k, \quad (21)$$

$$g_j(x^k+\lambda q^k)\leqslant \mathrm{h}_k-0.25\lambda\mathrm{d}_k^{1+\mathrm{e}},j\in L_2^+(x^k), \quad (22)$$

$$g_j(x^k+\lambda q^k)\leqslant 0,j\in L_2^-(x^k). \quad (23)$$

步骤 5 令 $x^{k+1}=x^k+\lambda_k q^k$,$k=k+1$,转回步骤1.

注 1 由引理4,5易证(21)~(23)式对充分小的正数 λ 成立,从而步骤4是可执行的．

注 2 由(23)式可知 $L_2^-(x^{k+1})\supseteq L_2^-(x^k)$;当 $x^t\in X_0$ 即 $\mathrm{h}(x^t)=0$ 时有:$x^k\in X_0,\forall k\geqslant t$;当 $x^k\notin X_0$ 时,$F_{c_k}(x^{k+1})\leqslant F_{c_k}(x^k)$ 不一定成立,但由(22)式可知 $\mathrm{h}(x^{k+1})<\mathrm{h}(x^k)$.

2 算法的全局收敛性

引理 6 存在正整数 t,使得 $c_k\equiv c_t\overset{\triangle}{=}c,\forall k\geqslant t$.(证明可参考文献[12]的引理4.)

下面将证明上述算法产生的点列 $\{x^k\}$ 的任意极限点 x^* 必是问题(P)的 K-T点.

不妨假设存在无穷子列 K,使得 $x^k\to x^*$,$L_2^+(x^k)\equiv L_2^+$,$L_2^-(x^k)\equiv L_2^-$,$k\in K$.记

$$D_j^*=|g_j(x^*)|,j\in L_2^-,D_j^*=|g_j(x^*)-\mathrm{h}(x^*)|^p,j\in L_2^+,D_j^*=0,j\in L_1;D_*=\mathrm{diag}(D_j^*,j\in L), \quad (24)$$

则 $D_j^*\geqslant 0(\forall j\in L)$,且当 $D_j(x^*)>0$ 时,由(24)和(3)易推得 $D_j^*=D_j(x^*)$.

于是由引理1知 $(A(x^*)^{\mathrm{T}}A(x^*)+D_*)$ 是正定阵．记 $A_*,Q_*,\mathrm{c}_*,P_*,\mathrm{T}_*,\mathrm{U}_*,\mathrm{f}_*,\mathrm{d}_*$ 为(4)~(6)式和(21)~(23)式在点 x^* 处以 D_* 代替 $D(x^*)$ 相应的各量．

引理 7 如 x^* 不是(P)的 K-T点,则 $\mathrm{d}_*>0$,从而 $k\in K$ 充分大时,$\mathrm{d}_k\geqslant 0.5\mathrm{d}_*$.

证明 因 $\mathrm{d}_k\to\mathrm{d}_*$,$k\in K$,故只须证明 $\mathrm{d}_*>0$.当 $\mathrm{h}(x^*)=0$ 时,$D_*=D(x^*)$,$\mathrm{d}_*=\mathrm{d}(x^*)$,

由引理4即得 $\mathrm{d}_*>0$.而当 $\mathrm{h}(x^*)>0$ 时,由(14)式即得 $\mathrm{d}_*>0$.

引理 8 如 x^* 不是问题(P)的 K-T点,则 $\lambda_k\geqslant\lambda_*\overset{\triangle}{=}\inf\{\lambda_k,k\in K\}>0,\forall k\in K$.

证明 (i)分析(21)式．由 $D_k\to D_*$,$\mathrm{d}_k\to\mathrm{d}_*$,$k\in K$,可知 $\{v^k,k\in K\}$,$\{q^k,k\in K\}$ 有界．由引理7及引理4(Ⅱ)有:

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{F_{c_k}(x^k+\lambda q^k)-F_{c_k}(x^k)+0.25\lambda d_k^{1+e}-0.5\lambda h_k d_k^e}{\lambda}$$
$= DF_{c_k}(x^k;q^k)+0.25d_k^{1+e}-0.5h_k d_k^e$
$= -0.25d_k^{1+e}\leqslant -0.125d_k^{1+e}<0,$
故对于充分大的 $k\in K$及充分小的正数λ,(21)式恒成立.

(ii)分析(22)式.分2种情形讨论:① 对于 $j\in L_2^+$ 且 $g_j(x^*)<h(x^*)$,有:
$\lim_{\lambda\to 0+}\left[g_j(x^k+\lambda q^k)-h(x^k)+0.25\lambda d_k^{1+e}\right]=g_j(x^k)-h(x^k)\leqslant 0.5[g_j(x^*)-h(x^*)]<0,$
故当 $k\in K$充分大及$\lambda>0$充分小时,$g_j(x^k+\lambda q^k)\leqslant h(x^k)-0.25\lambda d_k^{1+e}$.
② 对于 $j\in L_2^+$ 且 $g_j(x^*)=h(x^*)$,有:
$g_j(x^k+\lambda q^k)-h(x^k)+0.25\lambda d_k^{1+e}\leqslant g_j(x^k+\lambda q^k)-g_j(x^k)+0.25\lambda d_k^{1+e}$
$=\lambda\nabla g_j(x^k)^T q^k+0.25\lambda d_k^{1+e}+b(\lambda).$ (25)
由(20),(15)式知: $A_k^T q^k=d_k^e A_k^T q_1^k=d_k^e\left[D_k c_k+V^k+D_k(A_k^T A_k+D_k)^{-1}V^k\right]=d_k^e(V^k+O(D_j^k))$
故 $\nabla g_j(x^k)^T q^k=d_k^e v_j^k+O(D_j^k)$,
当 $j\in L_2^+$ 时由(16)式有: $v_j^k\leqslant -d_k+O(D_j^k)$, $D_j^k=|h(x^k)-g_j(x^k)|^p\to 0, k\in K$,故
$$\nabla g_j(x^k)^T q^k\leqslant -d_k^{1+e}+O(D_j^k). \quad (26)$$
由(25)及(26)式得 $g_j(x^k+\lambda q^k)-h(x^k)+0.25\lambda d_k^{1+e}\leqslant -0.375\lambda d_k^{1+e}+o(\lambda)\leqslant 0.$
综合①② 可知:对充分大的 $k\in K$及充分小的正数λ,(22)式恒成立.

(iii)分析(23)式.分2种情形讨论.

① 对于 $j\in L_2^-$ 且 $g_j(x^*)<0$,由$\{q^k,k\in K\}$有界易知对充分大的 $k\in K$及充分小的正数λ,
恒有 $g_j(x^k+\lambda q^k)\leqslant 0.$

② 对于 $j\in L_2^-$ 且 $g_j(x^*)=0$,有 $D_j^k=|g_j(x^k)|^p\to 0, k\in K$,而 $j\in L_2$时 $v_j^k\leqslant -d_k+O(D_j^k), k\in K$,故(26)式仍成立.从而:
$g_j(x^k+\lambda q^k)=g_j(x^k)+\lambda\nabla g_j(x^k)^T q^k+o(\lambda)$
$\leqslant\lambda\nabla g_j(x^k)^T q^k+b(\lambda)$
$\leqslant -\lambda d_k^{1+e}+\lambda O(D_j^k)+o(\lambda)\leqslant -0.5\lambda d_k^{1+e}+o(\lambda)$
$\leqslant 0,$
由此可知当 $k\in K$充分大及$\lambda>0$充分小时,(23)式成立.

综合(i)~(iii)的讨论及算法步骤5可判定引理8成立.

定理1 设假设1成立,则算法A或有限步终止于问题(P)的K-T点,或产生无穷点列$\{x^k\}$,使得$\{x^k\}$的任一极限点x^*必为问题(P)的K-T点.

证明 定理的前部分由引理4及算法的步骤2获证.现假设算法产生无穷点列$\{x^k\}$,x^*为其任一极限点.(反证)假设x^*不是K-T点,由算法步骤4可知下列2种情形之一成立.

情形A 存在 $x'\in X_0$,从而 $h(x')=0$.对充分大的k,且c_k固定,由(21)式及引理7,8有:
$F_c(x^{k+1})\leqslant F_c(x^k)-0.25\lambda_k d_k^{1+e}+0.5\lambda_k h_k d_k^e$
$\leqslant F_c(x^k)-0.0625\lambda_* d^{1+e}<F_c(x^k).$ (27)
可知$\{F_c(x^k)\}$单调下降,又$\lim_{k\in K}F_c(x^k)=F_c(x^*)$,故由文献[10]中定理1.1.4可知:$\{F_c(x^k)\}$收敛.
在(27)式中令$k\to\infty$,即得:$0.0625\lambda_* d^{1+e}\leqslant 0$,矛盾.

情形B 若$x^k\notin X_0$,$\forall k\in K$,则$h(x^k)>0$.由(22)式及(2)式知:
$h(x^{k+1})\leqslant h(x^k)-0.25\lambda_k d_k^{1+e}\leqslant h(x^k)-0.0625\lambda_* d^{1+e}<h(x^k),$ (28)
故$\{h(x^k)\}$单调下降,结合$\lim_{k\in K}h(x^k)=h(x^*)$可知:$\{h(x^k)\}$收敛.

在(28)式中令$k\to\infty$,得$0.0625\lambda_* d^{1+e}\leqslant 0$,矛盾.

综合情形A与B可知x^*为问题(P)的K-T点.

3 算法的强收敛性

引理9 如$x^k\notin X_0$,$h(x^k)>0$,则$h(x)$在x^k沿任意方向d的方向导数$h'(x^k;d)$为:
$$h'(x^k;d)=\max\{\nabla g_j(x^k)^T d \mid j\in L_2^+(x^k)\}. \quad (29)$$

假设2 算法A产生的点列$\{x^k\}$有界.

定理2 在假设1,2下,存在$r_0>0$,$r_1>0$使得搜索方向q^k满足:
$$d_k\geqslant r_0\|q^k\|^{\frac{1}{e}},\ \forall k=1,2,3,\cdots, \quad (30)$$
$$DF_c(x^k;q^k)\leqslant -r_1\|q^k\|^{1+\frac{1}{e}},\ \text{if } h(x^k)=0, \quad (31)$$
$$h'(x^k;q^k)\leqslant -r_0\|q^k\|^{1+\frac{1}{e}},\ \text{if } h(x^k)>0. \quad (32)$$

证明 首先由(15)式及有界性易证(30)式成立.其次由引理4(II)可知当$h(x^k)=0$时,$DF_c(x^k;q^k)\leqslant -0.5d_k^{1+e}\leqslant -0.5r_0^{1+e}\|q^k\|^{\frac{1+e}{e}}$,故(31)式成立.最后由(29)式及引理4(II)可得$h'(x^k;q^k)\leqslant -d_k^{1+e}\leqslant -r_0\|q^k\|^{1+\frac{1}{e}}$,故(32)式成立.

定理3 设假设1,2成立,则$\lim_{k\to\infty}\|x^{k+1}-x^k\|=0$;如再设$\{x^k\}$有孤立极限点$x^*$,则$\lim_{k\to\infty}x^k=x^*$.即算法A在以问题(P)的K-T点形成的解集内是强收敛的.

证明 类似于定理1的证明,利用(21)或(22)及(30)可推得$\lim_{k\to\infty}\lambda\|q^k\|^{1+\frac{1}{e}}=0$,从而知$\lim_{k\to\infty}\lambda_k\|q^k\|$

$= 0$,故 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{k+1} - x^k\| = \lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k\|q^k\| = 0$. 若 $\{x^k\}$ 有孤立极限点 x^*,则由文献[10]中的定理 1.1.5知 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k = x^*$.

4 算例

在以下两个算例中,均取 $c_0 = 10$, $e = 0.1$, $U = 0.6$.

例 1[12] $\min f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2$

s. t. $g_1(x) = x_1 + x_2 - 4 = 0$,

$g_2(x) = - x_1 + x_2 + 3 \leqslant 0$.

例 2[13] $\min f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

s. t. $g_1(x) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0$,

$g_2(x) = 0.25x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0$.

用所给的算法 A对例 1和例 2进行求解, 对不同的初始点 x^1, 其运算结果反映在表 1和表 2中.

表 1 例 1的求解结果

Table 1 Result of Example 1

初始点 Initial point	终止解 Terminative solution x^*	$f(x^*)$	迭代次数 Number of iteration
$\begin{pmatrix}100\\80\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.499996\\0.499996\end{pmatrix}$	6.999989	27
$\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.490966\\0.508177\end{pmatrix}$	6.930159	26
$\begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3.499996\\0.499995\end{pmatrix}$	6.999987	27

表 2 例 2的求解结果

Table 2 Result of Example 2

初始点 Initial point	终止解 Terminative solution x^*	$f(x^*)$	迭代次数 Number of iteration
$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.831365\\0.915832\end{pmatrix}$	1.372794	28
$\begin{pmatrix}0.1\\0.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.841335\\0.912861\end{pmatrix}$	1.350098	28
$\begin{pmatrix}-0.9\\0.6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0.822872\\0.911438\end{pmatrix}$	1.393474	26

参考文献

1 Panier E R, Tits A L. A superlinearly convergent feasible method for the solution of inequality constrained optimizations. SIAM J Control & Optimization, 1987, 25 (4): 934 ~ 950.

2 Jian Jinbao, Zhang Kecun. A superlinearly and quadratically convergent type feasible method for constrained optimization. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2000, 15 (3): 319 ~ 331.

3 简金宝.非线性最优化一个超线性收收敛的可行下降算法.数学杂志, 1995, 15 (3): 319~ 326.

4 简金宝,薛声家.非线性约束最优化一族超线性收敛的可行方法.数学研究与评论, 1999, 19 (1): 135~ 140.

5 Gao Z Y. A superlinearly convergent feasible method for nonlinear programming with nonlinear inequality constraints part Ⅰ -algorithm. A. J of Northern Jiaotong University, 1996, 20 (1): 50~ 61.

6 高自友,吴 方.非线性约束条件下的 SQP可行方法.应用数学学报, 1995, 18 (4): 579~ 590.

7 Polak E, Mayne D Q. Combined phaseⅠ -phaseⅡ methods of feasible directions. Math Prog, 1979, 17 (1): 32~ 61.

8 Gao Z Y. A superlinearly convergent feasible method for nonlinear programming with nonlinear inequality constraints (part Ⅱ) -subalgorithm A. J of Northern Jiaotong University, 1996, 20 (6): 629~ 634.

9 简金宝,张可村.不等式约束最优化一个具有强收敛性的强次可行方向法.西安交通大学学报, 1999, 33 (8): 88~ 91.

10 简金宝.非线性约束最优化超线性与二次收敛算法的研究 (博士学位论文), 西安: 西安交通大学, 2000.

11 简金宝.次可行和强次可行方向法的研究.见: 越民义.最优化理论及应用.西安: 西安电子科技大学出版社, 1994, 113~ 118.

12 简金宝.最优化问题广义投影下的广义次可行方向算法.广西科学, 1997, 4 (4): 246~ 250.

13 赖炎连,高自友,贺国平.非线性最优化的广义梯度投影法.中国科学, 1992, 9 (A): 916~ 924.

14 胡适全.运筹学习题集,北京: 清华大学出版社.

15 希梅尔劳 D M.实用非线性规划,北京: 科学出版社, 1983.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 255页 Continue from page 255)

参考文献

1 贺细顺等.海水散射引起激光脉冲传输延迟的研究.激光与红外, 2001 (1) .

2 杜竹峰等.激光对潜通信的信号能量传递计算.华中理工大学学报, 1997 (8) .

3 Stotts L B. Closed form expression for optical pulse broa-ding in multiple-scattering media. Appl Opt Let, 1978, 17 (4) .

4 邹传云.光无线 PPM通信的研究 (博士论文),成都: 成都电子科技大学电子工程学院. 1999.

(责任编辑: 黎贞崇)