DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.003
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 9-10

非齐次马氏链随机选择的一个强极限定理

A Strong Limit Theorem on the Random Selection for Nonhomogenous Markov Chains

汪忠志　　杨卫国*
Wang Zhongzhi　Yan Weiguo
(安徽工业大学数理系　安徽马鞍山市　243002)
(Dept. of Math.& Phy., Anhui Univ. of Technology, Ma'anshan, Anhui, 243002, China)

摘要　利用鞅方法,研究非齐次马氏链随机选择的若干强极限定理.

关键词　非齐次马氏链　鞅　随机选择　强极限
中图法分类号　O211.4

Abstract　Some strong limit theorems on the random selection for nonhomgenous Markov chains are discussed by means of martingle method.

Key words　nonhomgenous Markov chains, martingale, random selection, strong limit

随机选择的概念最早源于赌博系统,二三十年代德国著名统计学家 R. V. Mises发现了这个问题的重要性,他把它作为公理而引进[1]. Kolmogorov在文献[2]中讨论了这个问题与概率论逻辑基础的关系,本文利用变换的概念,将随机选择的有关结果推广到非齐次马氏链中.

1 定义

对本文所涉及的问题都将在固定的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上进行讨论, $\{\mathcal{F}_n, n\geq 1\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的自然 σ 代数流, 即 $\mathcal{F}_n=\sigma(X_0, \cdots, X_n)$, 约定 $\mathcal{F}_0=\{\emptyset, \Omega\}$, 对几乎处处意义下成立的等式或不等式常省去 a.s. 记号.

设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是状态空间为 $S=\{1, 2, \cdots m\}$ 的非齐次马氏链,其初始分布与转移概率矩阵分别为:

$$(q(1), q(2), \cdots, q(m)), \tag{1}$$

$$P_n=(p_n(i, j))_{m\times m}, \ i, j\in S, \ n=1, 2, \cdots \tag{2}$$

其中 $p_n(i, j)=P(X_n=j|X_{n-1}=i)$, 则

$$P(X_0=x_0, \cdots, X_n=x_n)=q(x_0)\prod_{k=1}^{n} p_k(x_{k-1}, x_k), \ n\geq 1. \tag{3}$$

在考虑非齐次马氏链随机选择时,设 $\{V_n, \mathcal{F}_{n-1}, n\geq 1\}$ 是适随机序列,称 $\{V_n, n\geq 1\}$ 为可预报序列[4].

定义　设 $\{X_n, n\geq 0\}$、$\{V_n, n\geq 1\}$ 均由上述定义, $f_n(x, y)$, $(n\geq 1)$ 是定义在 $S\times S$ 上的二元函数列称

$$\Gamma_n=\sum_{k=1}^{n} V_k f_k(X_{k-1}, X_k) \tag{4}$$

为 $\{f_n(X_{n-1}, X_n)\ n\geq 1\}$ 关于 $\{V_n, n\geq 1\}$ 的变换.

2 主要结果

定理 1　设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是具有初始分布 (1) 和转移概率矩阵 (2) 的非齐次马氏链, $f_n(x, y)$, $(n\geq 1)$ 是定义在 $S\times S$ 上的二元函数列, $\{V_n, n\geq 1\}$ 如前定义, $\{a_n, n\geq 1\}$ 是一列单调不减的可预报序列, 且 $a_n\uparrow\infty$, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} V_n^2 E[f_n^2(X_{n-1}, X_n)\,|\,X_{n-1}]<+\infty, \tag{5}$$

则

$$\lim_{n} a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n} V_k\{f_k(X_{k-1}, X_k)-E[f_k(X_{k-1}, X_k)\,|\,X_{k-1}]\}=0. \tag{6}$$

证明　令

$$Y_k=f_k(X_{k-1}, X_k)-E[f_k(X_{k-1}, X_k)\,|\,X_{k-1}], \ k\geq 1, \tag{7}$$

易知 $\{Y_n, \mathcal{F}_n, n\geq 1\}$ 是一鞅差序列,而由 V_n 及 a_n 是

2001-09-04收稿, 2001-10-25修回。

* 江苏理工大学数学系, 江苏镇江市, 212013 (Department of Mathematics, Jiangsu University of Technology, Zhenjiang, Jiangsu, 212013, China)

F_{n-1}可测的，所以 $\{V_n Y_n / a_n,\ F_n,\ n \geqslant 1\}$ 亦构成一鞅差序列[4]. 令

$$Z_n = V_n Y_n / a_n, \tag{8}$$

于是

$$E\ (Z_n^2 | F_{n-1}) = \tag{9}$$

$$E\ \left[\left(\frac{V_n Y_n}{a_n}\right)^2 | F_{n-1}\right] = \frac{V_n^2}{a_n^2} E\ [Y_n^2 | F_{n-1}] \leqslant$$

$$\frac{V_n^2}{a_n^2} E\ [f_n^2\ (X_{n-1},\ X_n) | X_{n-1}], \tag{10}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} V_n^2 E\ [f_n^2\ (X_{n-1},\ X_n) | X_{n-1}] < \infty$.

$$\tag{11}$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\ [Z_n^2 | F_{n-1}] < \infty, \tag{12}$$

于是由鞅差序列收敛定理[4]，有

$$\sum_{k=1}^{n} V_k Y_k / a_n.\ 收敛于零, \tag{13}$$

即得 (6) 式成立。

以下恒假设 $\{V_n,\ n \geqslant 1\}$ 是随机选择函数，即 V_n 是在 $\{0,\ 1\}$ 中取值的布尔函数，在考虑随机选择的问题时，根据 V_k 的值来选取序列

$$X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}. \tag{14}$$

$$(X_0, X_1), (X_1, X_2), \cdots, (X_{n-1}, X_n) \tag{15}$$

的子序列：当且仅当 $V_k = 1$时选取式 (14)、(15) 中的 X_k，$(X_{k-1},\ X_k)$ 于是得到式 (14) 与式 (15) 的子序列，记 $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} V_k$，$A_n\ (j,\ k) = \sum_{k=1}^{n} V_k \delta_j\ (X_k)$，

$A_n\ (i,\ j,\ k) = \sum_{k=1}^{n} V_k \delta_i\ (X_{k-1})\ \delta_j\ (X_k)$，

注意到

$$E\ [f_k\ (X_{k-1},\ X_k) | X_{k-1}] = \sum_{j=1}^{m} f_k\ (X_{k-1},\ j)\ p_k\ (X_{k-1},\ j), \tag{16}$$

设 $\delta(\cdot)$ 是 Kronecker δ函数，即 $\delta_j\ (i) = \delta_{ij}$，由定理 1可得如下几个推论 .

推论 1 设 $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ 是一非齐次马氏链，$f\ (x,\ y)$ 是定义在 $S \times S$上的二元函数，$\{V_n,\ n \geqslant 1\}$、$\{\tau_n,\ n \geqslant 1\}$ 如上述定义，且 $\tau_n \uparrow \infty$，则

$$\lim_n \tau_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} V_k\ \{f\ (X_{k-1},\ X_k) - \sum_{j=1}^{m} f\ (X_{k-1},\ j)\ p_k\ (X_{k-1},\ j)\} = 0. \tag{17}$$

证明　因为

$$E\ [f^2\ (X_{k-1},\ X_k) | X_{k-1}] = \sum_{j=1}^{m} f^2\ (X_{k-1},\ j)\ p_k\ (X_{k-1},\ j) \leqslant \max_{i,j} f^2(i,j), k \geqslant 1, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{-2} V_k^2 E[f^2(X_{k-1}, X_k) | X_{k-1}] \leqslant \max_{i,j} f^2(i,j)。$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{V_k}{\tau_k}\right)^2 = \max_{i,j} f^2\ (i,\ j) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \tag{19}$$

由 (19) 式及定理 1即得 (17) 式。

推论 2 设 $\{X_n,\ n \geqslant 0\}$ 是一非齐次马氏链，$f\ (x,\ y)$，$\{V_n,\ n \geqslant 1\}$，$A_n\ (j,\ k)$，$A_n\ (i,\ j,\ k)$，τ_n 如前定义，且 $\tau_n \uparrow \infty$，则

$$\lim_n \tau_n^{-1}\ [A_n\ (j,\ k) - \sum_{k=1}^{n} V_k p_k\ (X_{k-1},\ j)] = 0. \tag{20}$$

证明　在推论 1中令 $f\ (s,\ t) = \delta_j\ (t)$，$s,\ t \in S$，于是

$$\sum_{k=1}^{n} V_k\ \{f\ (X_{k-1}, X_k) - \sum_{t=1}^{m} f\ (X_{k-1}, t)\ p_k\ (X_{k-1}, t)\} = \sum_{k=1}^{n} V_k\ \{\delta_j\ (X_k) - \sum_{t=1}^{m} \delta_j\ (t)\ p_k\ (X_{k-1},\ t)\}$$

$$= A_n\ (j,\ k) - \sum_{k=1}^{n} V_k p_k\ (X_{k-1},\ j), \tag{21}$$

由 (21) 式与推论 1即得 (20) 式 .

推论 3 在推论 2的假设下，有

$$\lim_n \tau_n^{-1}\ [A_n\ (i,\ j,\ k) - \sum_{k=1}^{n} V_k \delta_i\ (X_{k-1})\ p_k\ (i,\ j)] = 0. \tag{22}$$

证明　在推论 1中令 $f\ (s,\ t) = \delta_i\ (S)\ \delta_j\ (t)$，$s,\ t \in S$，于是

$$\sum_{k=1}^{n} V_k\ \{f\ (X_{k-1}, X_k) - \sum_{t=1}^{m} f\ (X_{k-1}, t)\ p_k\ (X_{k-1}, t)\} = \sum_{k=1}^{n} V_k\ \{\delta_i\ (X_{k-1})\ \delta_j\ (X_k) - \sum_{t=1}^{m} \delta_i\ (X_{k-1})\ \delta_j\ (t)\ p_k\ (X_{k-1},\ t)\} = A_n\ (i,\ j,\ k) - \sum_{k=1}^{n} V_k \delta_i\ (X_{k-1})\ p_k\ (i,\ j), \tag{23}$$

由 (23) 式与推论 1即得 (22) 式 .

参考文献

1　Mises R V. Mathematical Theory of Probability and Statistics. New York: Academic Press, 1964. 1~ 49.

2　Kolmogorov A N. On the logical foundations of probability theory. Lecture Notes in Mathematics, New York: Springer-Verlag, 1982. 1021, 1~ 5.

3　Wang Zhongzhi. A strong limit theorem on random selection for the N-valued random variables. Pure and Applied Mathematics, 1999, 15 (4): 56~ 61.

4　Stout W F. All Most Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974. 65, 76, 77.

(责任编辑: 黎贞崇)