DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.006
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 16~17

一类有限群的自同构群阶的上确界*

Supremum of the Order of Automorphism Group of Some Finite Group

钟祥贵

Zhong Xianggui

(广西师范大学数学系, 桂林市育才路 3号, 541004)

(Dept. of Math., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 得到有限群的所有 Sylow子群均循环时, 其自同构群阶的上确界, 推广了相关文献的结果.

关键词 有限群 自同构群 群阶 上确界

中图法分类号 O152.1

Abstract The supremum of the order of automorphism group of the finite groups whose any Sylow subgroups are cyclic is obtained, and the results in the relevant reference is improved.

Key words finite group, automorphism group, order of group, supremum

考虑什么样的有限群其自同构群阶的上确界仅与群阶有关, 是研究有限群 G与其自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$之间内在关系的一个重要方面. 对于有限 p-群,这个问题已获解决 (见引理 1). 而对于有限非幂零群,同样的问题要困难得多,至今尚无统一的解决方法. 文献 [1]讨论了群阶无平方因子的偶阶群情形. 众所周知,阶无平方因子的群其所有 Sylow子群均循环. 这启示我们考虑文献 [1]的一个自然推广.

本文所考虑的群均为有限. 另外, $\mathrm{Aut}(G)$是 G的自同构群, C_n为 n阶循环群,所有未加说明的符号都是标准的.

1 记号和引理

设群 G的阶 $|G| = n > 1$, n的素因子分解式为 $n = p_{1}^{n_1}p_{2}^{n_2}\cdots p_{s}^{n_s}$,其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$是互异素数. 记

$$j(n) = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=0}^{n_i-1}(p_i^{n_i} - p_i^{j});$$

又记: $S(n) = \{G \mid G$为群,并且 $|G| = n\}$.

关于数 $j(n)$,以下几个性质是明显的. 在定理 1的证明中我们将不加说明地引用:

(i) 当 $(n,m) = 1$时, $j(mn) = j(m)j(n)$;

(ii) $h(n) \mid j(n)$,并且 $h(n) = j(n) \Leftrightarrow n$无平方因子,这里 $h(n)$是欧拉函数.

引理 1 设 G为 p-群,则 $|\mathrm{Aut}(G)| \mid j(|G|)$,当且仅当 G为初等交换 p-群时, $|\mathrm{Aut}(G)| = j(|G|)$[2].

引理 2 (Van Dyek) 设 G是由生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_r$和关系 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_r) = 1, i \in I$所定义的群, $H = \langle a_1, \cdots, a_r\rangle$ (其中的 a_i可能相同), $\forall\, i \in I$, $f_i(a_1, \cdots, a_r) = 1$,则有满同态 $\varphi: F_r/N \to H, x_iN \mapsto a_i$,其中 $F_r = \langle x_1, \cdots, x_r\rangle$为自由群, $Y = \langle f_i(x_1, \cdots, x_r) \mid i \in I\rangle$, $N = Y^{F_r}$ (Y在 F_r中的正规闭包), $G = F_r/N$. 如果 $|G| \leqslant |H|$为有限,则 φ是群同构 (即 H是由生成元 $\{a_1, \cdots, a_r\}$与定义关系 $f_i(a_1, \cdots, a_r) = 1, \forall\, i \in I$所定义的群[4].

引理 3 设 m, n, r为正整数, $((r-1)m, n) = 1$,且在有限群 $G = \langle a, b \mid a^n = b^m = 1, a^b = a^r\rangle$, r模 n指数 k中, $m = kl_1l_2$, $\prod(l_1) \subseteq \prod(k)$, $(l_2, k) = 1$. 这里 $\prod(l_1)$是 l_1的素因子集. 那么

$$|\mathrm{Aut}(G)| = nl_1h(n)h(l_2).$$

证明 对 G的任一自同构 φ,有 $\varphi(a) = a^g$, $\varphi(b) = b^ia^j$. 根据 G的定义关系,可得

$$|a^g| = n, \tag{1}$$

$$|b^ia^j| = m, \tag{2}$$

$$(b^ia^j)^{-1}a^g(b^ia^j) = (a^g)^r. \tag{3}$$

由 (1)得 $(v, n) = 1$;由 (3)得 $a^{vri} = a^{vr}$. 因为 $(v, n) = 1$. 所以 $r^{i-1} \equiv 1 \pmod n$. 从而 $i \equiv 1 \pmod k$. 于是 $i \in \{1, k+1, 2k+1, \cdots, (l_1l_2-1)k+1\}$. 我们断言 $(i, m) = 1$. 令 $(i, m) = d$,则 $i = i_1d, m = m_1d$. 而 $(b^ia^j)^{m_1} = b^{m_1i}a^{j\frac{rm_1i-1}{ri-1}} = a^{j\frac{rm_1i-1}{ri-1}}$. 又 $r^i - 1 \equiv r - 1 \pmod$

2001-04-17收稿, 2001-11-09修回.

* 国家自然科学基金 (No. 10161001)、广西师范大学科研基金资助.

n)并且$(r-1,n)=1$. 从而$(r^i-1,n)=1, r^{m_1 i}-1=r^{mi_1}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$. 故$(r^{m_1 i}-1)/(r^i-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$. 即$(b^i a^j)^{m_1}=1$. 故$|b^i a^j| \mid m_1$,从(2)知$d=1$. 这表明$(i,m)=1$成立. 但当$(i,m)=1$时,对$\forall\, m_1<m$有$b^{im_1}\neq 1$. (否则$im_1 \mid m$, $(i,m)=1$导出$(i,m_1)=1, i \mid d$,矛盾.)从而$(b^i a^j)^{m_1}=b^{im_1}a^{j\frac{m_1^i-1}{r^i-1}}\neq 1$这表明$|b^i a^j|=m$当且仅当$(i,m)=1$. 现对$i$的取值作如下分组:

$$\begin{array}{lllll} 1, & k+1, & \cdots, & (l_2-1)k+1; \\ l_2k+1, & (l_2+1)k+1, & \cdots, & (2l_2-1)k+1; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (l_1-1)l_2k+1, & (l_1l_2-l_2+1)k+1, & \cdots, & (l_1l_2-1)k+1; \end{array}$$

则每个组模l_2后余数集一致. 而$(l_2,k)=1$,所以同一组不同数模l_2余数不同,从而i有$l_1 h(l_2)$种不同取法,j有n种不同取法. 并且$\langle a^e, b^e\rangle=\langle a,b\rangle$. 由引理2即有:

$\mathrm{Aut}(G)=\{\sigma \mid a^\sigma=a^v, b^\sigma=b^i a^j, v,i,j$取法如上$\}$,从而$|\mathrm{Aut}(G)|=nh(n)l_1 h(l_2)$.

引理**4**[1] 设G为可解群,则

$|\mathrm{Aut}(G)| \mid |G'| \mid j(|G|)$.

2 主要结果

定理**1** 假设$|G|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}$ $(p_1<p_2<\cdots<p_s)$. 如果非交换群G的所有Sylow子群均循环,那么$|\mathrm{Aut}(G)|$的上确界为: $p_{11}^{n_{11}-1}th(t)$. 其中$t=|G|/p_{11}^{n_{11}}$, $(t,p_1)=1$.

证明 由于G的所有Sylow子群均循环,且G非交换,故由文献[5]定理6.2有: $G\cong\langle a,b \mid a^n=b^m=1, a^b=a^r\rangle$, $(n,(r-1)m)=1, r^m\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$. 设$r$模$n$指数$k$,则$k \mid m$. 令$m=kl_1l_2$而$\prod(l_1)\subseteq\prod(k)$, $(l_2,k)=1$,则由引理3知$|\mathrm{Aut}(G)|=nh(n)l_1h(l_2)$. 这表明$|\mathrm{Aut}(G)|$由$nh(n)$与$mh(m)$控制. 现在$mn=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}$, $\forall\, p_i\in\prod(G)$,有$p_i\in\prod(m)$,或者$p_i\in\prod(n)$而$l_1h(l_2) \mid mh(m)$. 故$p_i\in\prod(m)$比$p_i\in\prod(n)$所对应的$|\mathrm{Aut}(G)|$小. 从而$|\mathrm{Aut}(G)|\leqslant\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}h(\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}})l_1$. 易见$|\mathrm{Aut}(G)|\leqslant th(t)p_{11}^{n_{11}-1}$. 取$G\cong\langle a,b \mid a^t=b^{p_{11}^{n_{11}}}=1, a^b=a^r, r^{p_1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ t)>$. 则应用引理3,有$|\mathrm{Aut}(G)|=th(t)p_{11}^{n_{11}-1}$. 证毕.

由定理1的证明不难得到下面的推论.

推论**1**[1] 设G是非交换群, $2 \mid n$,且n无平方因子,那么,

(i) $\forall\, G\in S(n)$, $|\mathrm{Aut}(G)| \mid \frac{n}{2}j(n)$;

(ii) $\exists\, G\in S(n)$, $|\mathrm{Aut}(G)|=\frac{n}{2}j(n)$.

对G的更一般情形,下述定理给出$|\mathrm{Aut}(G)|$的一个上界.

定理**2** 设$|G|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_s^{n_s}$ $(p_1<p_2<\cdots<p_s)$. 则

(i) 若G的Sylow p_1-子群循环,那么$|\mathrm{Aut}(G)| \mid \frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}j(|G|)$;

(ii) 若G的所有Sylow子群循环,且G非交换,那么: 存在G使$|\mathrm{Aut}(G)|=\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}j(|G|)$当且仅当$G$是无平方因子的偶阶群.

证明 首先,由于G的Sylow p_1-子群循环,p_1是$|G|$的最小素因子,故由Burnside定理可知G可解并且存在指数为$p_{11}^{n_{11}}$正规子群H,显然$G/H\cong C_{p_{11}^{n_{11}}}$,故$G'\leqslant H$,由引理4知

$|\mathrm{Aut}(G)| \mid |G'| \mid j(|G|) \mid |H| \mid j(|G|)=\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}j(|G|)$.

这证明了定理2的结论(i).

其次,结合定理1的证明,我们有

$$\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}j(|G|)=\frac{|G|}{p_1}h(\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}}).$$

从而$j(|G|)=p_{11}^{n_{11}-1}h(\frac{|G|}{p_{11}^{n_{11}}})$. 即

$$j(p_{11}^{n_{11}})\,j(p_{22}^{n_{22}})\cdots j(p_s^{n_s})=p_{11}^{n_{11}-1}h(p_{22}^{n_{22}})\cdots h(p_s^{n_s}).$$

由于$j(p^n)=p^{\frac{1}{2}n(n-1)}\prod_{i=1}^{n}(p^i-1)=h(p^n)p^{(n-1)(\frac{n}{2}-1)}\prod_{i=2}^{n}(p^i-1)$,并考虑到$p_1$是$|G|$的最小素因子,故由上式即得$n_j=1(j=1,2,\cdots,s)$并且$p_1=2$. G为无平方因子的偶阶群.

最后,由本文定理1的推论,可知定理结论(2)的充分性成立.

注 当G是交换群时,文献[1]定理1的(ii)及本文定理2(ii)充分性不一定成立. 因为此时, $G=C_{p_1}\times C_{p_2}\times\cdots\times C_{p_s}$且$p_1=2$. 显然$|\mathrm{Aut}(G)|=j(|G|)$,而不是$|\mathrm{Aut}(G)|=\frac{|G|}{2}j(|G|)$这种情形, $|\mathrm{Aut}(G)|$可由引理1解决.

参考文献

1 徐尚进. 无平方因子群的自同构群阶的上确界. 数学研究, 1999, 32(3): 295~297.
2 张远达. 有限群构造. 上册. 北京: 科学出版社, 1982.
3 Huppert H. Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, 1967.
4 班桂宁, 俞曙霞. 一类p群的自同构群的阶. 数学学报, 1992, 35(4): 570~574.
5 徐明曜. 有限群导引. 上册. 北京: 科学出版社, 1999.

(责任编辑: 黎贞崇)