DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.007
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 18~ 20

一类时滞微分方程解的有界性
Boundedness of Solutions of a Class Retarded Equations

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路 3号 541004)
(Math. and Comp. Sci. College, Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 结合 Liapunov泛函，得到一类二阶时滞系统解的有界性的一个充分必要条件，推广了相关的有界性结果.

关键词 时滞系统 Liapunov泛函 有界性
中图法分类号 O175.1

Abstract By using Liapunov function, the boundedness of solutions of some retarded equations is investigated. A necessary and sufficient condition is obtained. Some results of boundedness are generalized.

Key words retarded system, Liapunov function, boundedness

考虑时滞微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{a(x)}[y - F(x)] + \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\,ds, \\ \dot{y} = -a(x)g(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a(x) = \exp(\int_0^x h(s)ds)$, $F(x) = \int_0^x a(s)f(s)ds$, 函数 $a(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 均连续且满足初值问题解的存在唯一性条件，时滞 τ 为非负常数. 特殊地，若 $a(x) = 1$, 则系统(1)成为时滞 Lienard方程

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x(t-\tau)) = 0, \tag{2}$$

文献[1, 2]研究了系统(2)解的有界性、稳定性和振动性，若 $\tau = 0$, 则系统(1)成为非时滞系统

$$\dot{x} = \frac{1}{a(x)}[y - F(x)], \dot{y} = -a(x)g(x), \tag{3}$$

许多文献研究过系统(3)解的有界性[3,4]. 本文结合运用 Liapunov泛函，得到了系统(1)解的有界性的一个充要条件，推广了相关的有界性结果.

定义 1 系统(1)的解称为一致有界的，如果对每个 $B_1 > 0$, 存在 $B_2 > 0$ 使得 $\{(\varphi, y_0) \in C([-\tau, 0], R) \times R\}$, $\|\varphi\| + |y_0| < B_1$ 蕴含 $|x(t, \varphi, y_0)| + |y(t, \varphi, y_0)| < B_2$ 对任意 $t \in R$ 均成立. 这里 $C([-\tau, 0], R)$ 表示所有连续函数 $\varphi: [-\tau, 0] \to R$ 取上确界范数构成的空间.

我们记 $G(x) = \int_0^x a^2(s)g(s)ds$, 并设连续函数 $F(x)$, $g(x)$, $a(x)$ 满足下述条件:

(i) $xg(x) > 0$, $xF(x) > 0$ $(x \neq 0)$;

(ii) $a(x)g(x)[F(x) - 2\tau a(x)g(x)] \geq 0$.

定理 1 假设条件(i)、(ii)成立，则系统(1)的解一致有界的充分必要条件为

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sup[G(x) + F(x)] + \int_0^{+\infty} a(s)g(s)F(s)ds \\ \quad = +\infty, \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sup[G(x) - F(x)] + \int_{-\infty}^{0} a(s)g(s)F(s)ds \\ \quad = +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

证明 假设 $x(t) = x(t, \varphi, y_0)$, $y(t) = y(t, \varphi, y_0)$ 是系统(1)定义在 $[0, T)$ 上的解，T 可以取 $+\infty$. 令 $D > 0$ 使得 $\|\varphi\| + |y_0| \leq D$. 考虑泛函

$$V(t) = y^2 + 2G(x) + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+s}^{t} a^2(x(u))g^2(x(u))\,du\,ds, \tag{5}$$

计算 $V(t)$ 关于系统(1)的全导数得

$$\dot{V}_{(1)}(t) = 2y\dot{y} + 2a^2(x)g(x)\dot{x} + \int_{-\tau}^{0} a^2(x(t))[g^2(x(t)) - g^2(x(t+s))]ds =$$

$$-2ya(x)g(x) + 2a^2(x)g(x)[\frac{1}{a(x)}(y - F(x)) +$$

2001-03-01收稿，2001-06-29修回。

$$\int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\,ds] + \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{-\tau}^{0} g^2(x(t+s))\,ds = -2a(x)g(x)F(x) + 2a^2(x)g(x)\int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\,ds + \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds \leqslant -2a(x)g(x)F(x) + 2a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} |g(x(t))g(x(s))|\,ds + \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds \leqslant -2a(x)g(x)F(x) + \tau a^2(x)g^2(x) + a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds + \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds = -a(x)g(x)[F(x) - 2\tau a(x)g(x)] - a(x)g(x)F(x), \tag{6}$$

注意到 $a(x)$ 的定义以及条件 (i) 和 (ii)，就有

$$\dot V_{(1)}(t) \leqslant 0, \tag{7}$$

因此,存在正常数 $D_0 = D_0(D)$ 使 $V(t) \leqslant V(0) \leqslant D_0$, $t \in R^+$. 现在假设 (4) 式成立. 如果 $\lim\limits_{u\to+\infty}\sup G(u) = +\infty$,则存在常数 $B_1 > 0$ 使 $2G(B_1) > D_0$,由 $V(t)$ 的定义以及 $V(t) \leqslant D_0$ 推知 $x(t) \leqslant B_1$, $t \in R^+$、再由 $x(t)$ 的有界性以及 $\dot y$ 的表达式,易知 $y(t)$ 有界.

其次假定 $\lim\limits_{u\to+\infty}\sup F(u) = +\infty$,则由于

$$\dot x = \frac{y}{a(x)} + \int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\,ds - \frac{F(x)}{a(x)} \leqslant \frac{1}{a^2(x)} + y^2 + \tau + \int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds - \frac{F(x)}{a(x)},$$

注意到 $a(x)$ 的定义以及 (5)、(6) 式即知存在常数 $Q_0 = Q_0(D) > 0$ 使

$$\dot x \leqslant Q_0 - \frac{F(x)}{a(x)}, t \in R^+.$$

既然 $\lim\limits_{u\to+\infty}\sup F(u) = +\infty$,因而存在常数 $B_2 > 0$ 使 $B_2 > D$ 且 $\frac{F(B_2)}{a(B_2)} > Q_0$. 我们证明对任意 $t \in R^+$ 有 $x(t) < B_2$. 若不然,设存在 $t_1 > 0$ 使 $x(t_1) = B_2$ 而对 $0 \leqslant S < t_1$ 有 $x(s) < B_2$,于是有

$$0 \leqslant \dot x(t_1) \leqslant Q_0 - \frac{F(x(t_1))}{a(x(t_1))} = Q_0 - \frac{F(B_2)}{a(B_2)} < 0.$$

矛盾.

再设 $\lim\limits_{u\to+\infty}\sup[G(u) + F(u)] < +\infty$. 于是应有 $\int_0^{+\infty} a(s)g(s)F(s)\,ds = +\infty$. 假设 $Q_1 > 0$ 使 $|G(u)| + |F(u)| \leqslant Q_1$, $\forall u \in R^+$. 则有

$$|\dot x| \leqslant \left|\frac{y}{a(x)}\right| + \int_{t-\tau}^{t} |g(x(s))|\,ds + \left|\frac{F(x)}{a(x)}\right| \leqslant \frac{1}{a^2(x)} + y^2 + \tau + \int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds + |F(x)|^2 \leqslant Q_0 + Q_1^2 \triangleq M,$$

设 $B_3 > 0$ 使得

$$MD_0 + \int_0^D a(u)g(u)F(u)\,du < \int_0^{B_3} a(u)g(u)F(u)\,du,$$

我们断言对任意 $t \in R^+$ 有 $x(t) < B_3$. 事实上若存在 $t_2 > 0$ 使 $x(t_2) = B_3$,则可以找到 $t_0 \geqslant 0$ 满足 $x(t_0) = D$ 而 $D \leqslant x(s) \leqslant B_3$, $s \in [t_0, t_2]$. 注意到条件 (ii) 成立，从 t_0 到 t_2 积分 (6) 式即得

$$V(t_2) \leqslant V(t_0) - \int_{t_0}^{t_2} a(x(s))g(x(s))F(x(s))\,ds \leqslant D_0 - \int_{t_0}^{t_2} a(x(s))g(x(s))F(x(s))\frac{|\dot x(s)|}{M}\,ds \leqslant D_0 - \frac{1}{M}\left|\int_{t_0}^{t_2} a(x(s))g(x(s))F(x(s))\dot x(s)\,ds\right| = D_0 - \frac{1}{M}\left|\int_{x(t_0)}^{x(t_2)} a(u)g(u)F(u)\,du\right| \leqslant D_0 - \frac{1}{M}\left(\int_0^{B_3} a(u)g(u)F(u)\,du - \int_0^D a(u)g(u)F(u)\,du\right) < 0$$

矛盾. 因此对任意 $t \in R^+$ 有 $x(t) \leqslant B_1 + B_2 + B_3$. 同理可证当 $\lim\limits_{u\to-\infty}\sup[G(u) - F(u)] + \int_{-\infty}^{0} a(s)g(s)\cdot F(s)\,ds = +\infty$ 时有 $-B_4 \leqslant x(t)$, $\forall t \in R^-$. 因此存在 $D_1 = D_1(D) > 0$ 使对任意 $t \in R$ 有 $|x(t)| \leqslant D_1$, $|y(t)| \leqslant D_1$.

下面证明 (4) 式的条件也是必要的. 假若

$$\lim_{u\to+\infty}\sup[G(u) + F(u)] + \int_0^{+\infty} a(s)g(s)F(s)\,ds < +\infty, \tag{8}$$

则存在正常数 F_0, G_0, a_0 使对任意 $u \in R^+$ 都有 $|F(u)| \leqslant F_0$, $|G(u)| \leqslant G_0$, $a(u) \leqslant a_0$. 令 $\varphi \in C([-\tau, 0], R)$, $\varphi(0) > 0$ 且定义 $g_0 = \max\{|g(\varphi(u))|; u \in [-\tau, 0]\}$. 现在选取 $y_0 = y(0) > 0$ 满足

$$\frac{1}{2a_0^2}(y_0^2 - 4F_0^2 - 5\tau^2 a_0^2 g_0^2 - 4G_0 - 8\int_0^{+\infty} a(s)g(s)F(s)\,ds) > 3.$$

考虑函数 $H(t) = y^2 + 2G(x)$,注意到 $G(x)$ 的定义以及条件 (i) 知 $H(t)$ 为正定函数. 由条件 (ii) 我们有

$$\dot H(t) = -2a(x)g(x)F(x) + 2a^2(x)g(x)\int_{t-\tau}^{t} g(x(s))\,ds \geqslant -2a(x)g(x)F(x) - \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds \geqslant -3a(x)g(x)F(x) - a_0^2\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds. \tag{9}$$

由 (9) 式我们断定对任意 $t \in R^+$ 有 $\dot x(t) > 1$. 若不然,假设存在 $t_3 > 0$ 使 $\dot x(t_3) = 1$,而 $\dot x(s) > 1$ 对 $0 \leqslant$

$s < t_3$，则从 0 到 t_3 积分 (9) 式并交换二重积分的次序得：

$$H(t_3) \geqslant H(0) - 3\int_0^{t_3} a(x(s))g(x(s))F(x(s))\,ds - a_0^2\int_0^{t_3}\int_{s-f}^{s} g^2(x(\theta))\,d\theta\,ds \geqslant H(0) -$$

$$3\int_0^{t_3} a(x(s))g(x(s))F(x(s))\dot{x}(s)\,ds - \int_{-f}^{t_3}\int_{\theta}^{\theta+f} g^2(x(\theta))\,ds\,d\theta \geqslant H(0) -$$

$$3\int_{x(0)}^{x(t_3)} a(a)g(a)F(a)\,da - a_0^2 f\int_{-f}^{0} g^2(x(\theta))\,d\theta -$$

$$a_0^2 f\int_0^{t_3} g^2(x(\theta))\,d\theta \geqslant H(0) - 4\int_0^{+\infty} a(a)g(a)F(a)\,da -$$

$$a_0^2 f^2 g_0^2 \geqslant y_0^2 - 2G_0 - a_0^2 f^2 g_0^2 - 4\int_0^{+\infty} a(a)g(a)F(a)\,da,$$

另一方面，

$$H(t_3) = y^2(t_3) + 2G(x(t_3)) = [a(x(t_3))\dot{x}(t_3) + F(x(t_3)) - a(x(t_3))\int_{t_3-f}^{t_3} g(x(s))\,ds]^2 + 2G(x(t_3))$$

$$\leqslant 2a^2|\dot{x}(t_3)|^2 + 4F_0^2 + 4a_0^2 f^2 g_0^2 + 4\int_0^{+\infty} a(a)g(a)F(a)\,da + 2G_0,$$

也就是

$$2a_0^2|\dot{x}(t_3)|^2 \geqslant y_0^2 - 4F_0^2 - 4G_0 - 5a_0^2 f^2 g_0^2 - 8\int_0^{+\infty} a(a)g(a)F(a)\,da,$$

由 y_0 的选取知 $|\dot{x}(t_3)| > 1$，矛盾．故对任意 $t \in R^+$ 都有 $\dot{x}(t) > 1$，即 $x(t) > x(0) + t \to +\infty\ (t \to +\infty)$，对 (4) 式中第二式的证明是完全相仿的．必要性得证．

例　在系统 (1) 中取 $0 \leqslant f < \frac{1}{\pi}$，$a(x) = e^{-\frac{2x^2}{3}}$，$g(x) = \frac{x e^{\frac{4x^2}{3}}}{1+x^4}$，$F(x) = x e^{-\frac{x^2}{3}}$．容易验证，条件 (i)，(ii) 均成立，并且有

$$\int_0^{+\infty} a(x)g(x)F(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{3}}}{1+x^4}\,dx = +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{0} a(x)g(x)F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{3}}}{1+x^4}\,dx = +\infty,$$

从而满足定理 1 中的 (4) 式，系统的解有界．然而此时，$\lim_{x\to+\infty}\sup(G(x) + F(x)) < +\infty$，以及

$$\lim_{x\to+\infty}\sup(G(x) - F(x)) < +\infty.$$

即使取 $f = 0$，文献 [3～5] 亦不能判断此例解的有界性．

参考文献

1 Bo Zhang. Boundedness and stability of solutions of the retarded Liénard equation with negative damping. Nonlin Anal, 1993, 20 (3): 303～313.

2 Bo Zhang. Necessary and sufficient conditions for boundedness and oscillation in the retarded Liénard equation. J Math Anal Appl, 1996, 200 (2): 453～473.

3 韩茂安．一类广义 Liénard 方程解的有界性．科学通报，1995, 40 (21): 1925～1928.

4 孙继涛．Liénard 型系统的定性行为．数学物理学报，1994, 14 (1): 90～95.

5 Sugie J. On the boundedness of solutions of the generalized Liénard equation. Nonlin Anal, 1987, 11: 1391～1397.

(责任编辑　黎贞崇)

我国建成世界上最大的猕猴桃种质基因库

中国科学院武汉植物研究所建成世界上保存猕猴桃种质资源涵盖量最大、遗传资源最丰富的种质基因库。中科院组织的专家组认定，这个基因库的建立，使我国特有植物资源猕猴桃的研究和开发形成了完整体系，对猕猴桃产业的提速发展具有重要推动作用。

自上个世纪 70 年代末以来，武汉植物研究所共收集了猕猴桃属植物各类种质资源 200 余份，选择性保存了种间杂交后代及育种材料 9000 余株，发现和命名了 2 个新种，在此基础上建立了世界上第一个猕猴桃种质资源数据库平台。同时，该项研究在应用上解决了花期不遇、杂种不实等技术难点。

(据科学时报)