DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (2): 91～ 92

一类时滞方程概周期解的存在唯一性*

On the Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solutions for Some Retarded Differential Equations

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路3号 541004)
(Math.& Comp. Sci. College, Guangxi Normal University, 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 应用构造 Liapunov 泛函的方法，研究一类线性时滞微分方程概周期解的存在唯一性.

关键词 时滞方程 概周期解 存在唯一性
中图法分类号 O175

Abstract The existence and uniqueness of almost periodic solutions for some retarded differential equations are investigated by using Liapunov functional.

Key words retarded differential equation, almost periodic solution, existence and uniqueness

考虑时滞系统

$$x''+f(x)x'+g(x(t-\tau))=e(t), \qquad (1)$$

其中，f，g为连续函数，$\tau\geqslant 0$为常数．当 $e(t)=0$时，系统(1)成为

$$x''+f(x)x'+g(x(t-\tau))=0, \qquad (2)$$

文献[1,2]研究了系统(2)解的有界性、稳定性、振动性．当 $\tau=0$，$e(t)$为概周期函数时，系统(1)成为

$$x''+f(x)x'+g(x)=e(t), \qquad (3)$$

文献[3]运用指数二分法，文献[4]结合运用非线性临界理论和不动点方法研究了系统(3)概周期解的存在唯一性．本文研究时滞 $\tau>0$，而函数 $g(x(t-\tau))=kx(t-\tau)$的情形，即下述系统

$$x''+f(x)x'+kx(t-\tau)=e(t) \qquad (4)$$

概周期解的存在性、唯一性与渐近稳定性．记 $M=\sup\limits_{t\in R}\left|\int_0^t e(s)\mathrm{d}s\right|<+\infty$，从而 $E(t)=\int_0^t e(s)\mathrm{d}s$ 也是概周期函数[5].

假设 $C([-\tau,0],R^n)$表示全体连续映射 $[-\tau,0]\to R^n$ 构成的 Banach 空间，其范数定义为 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]}|\varphi(\theta)|$，这个空间简记为 C. C中的开球 C_H定义为: $C_H=\{\varphi:\varphi\in C,\|\varphi\|<H,H$为正常数$\}$. 对初始函数 $\varphi(t)$，$t\in[-\tau,0]$，系统(4)有唯一定义于 $[-\tau,+\infty)$上的解 $x(t)=x(0,\varphi)(t)$，在 $[-\tau,0]$上 $x(t)=\varphi(t)$，在 $[0,+\infty)$上满足系统(4).

为着证明的方便，我们先叙述下述定理

对泛函数微分方程

$$x'=f(t,x_t), \qquad (5)$$

这里 $x_t=x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta\in[-\tau,0]$. 考虑(5)的乘积系统

$$x'=f(t,x_t),\ y'=f(t,y_t), \qquad (6)$$

自然假定 $f(t,\varphi)$对 $\varphi\in C_H$关于 t是一致概周期的，$f(t,\varphi)$在 $R\times C_H$上连续.

定理 A[6] 设对 $t\geqslant 0$，$\varphi,\psi\in C_H$，存在一个连续的 Liapunov 泛函 $V(t,\varphi,\psi)$，满足

(i) $u(\|\varphi-\psi\|)\leqslant V(t,\varphi,\psi)\leqslant b(\|\varphi-\psi\|)$;

(ii) $|V(t,\varphi_1,\psi_1)-V(t,\varphi_2,\psi_2)|\leqslant L(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\psi_1-\psi_2\|)$;

(iii) $V'_{(6)}(t,\varphi,\psi)\leqslant -\lambda V(t,\varphi,\psi)$.

其中 λ，L为正常数，$u(s)$，$b(s)$为连续非减函数，当 $S\to 0$时 $u(s)\to 0$. 此时，若系统(5)有一个有界解 $x(t,t_0,\varphi)$使得 $\|x(t,t_0,\varphi)\|<H_1(0<H_1<H)$，则系统(5)在域 C_H上存在唯一的完全一致渐近稳定的概周期解.

定理 1 设 $f(x)$连续且 $f(x)\geqslant 2\tau k$，$e(t)$是概周期函数，则系统(4)存在唯一定义于 R上的完全一致渐近稳定的概周期解.

2001-07-25收稿，2002-02-01修回。
* 广西自然科学基金资助。

证明　我们记 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. 首先证明在假设条件下,系统(4)存在有界解 . 为此,把系统(4)写成等价形式

$$\begin{cases} x'=y+E(t), \\ y'=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x)-kx(t-f), \end{cases} \tag{7}$$

对任意 h∈ C,假设 $(x,y)=(x(t),y(t))$ 为系统(7)过(0,h)的解,作 Liapunov泛函

$$\begin{aligned} V(t) &= V(t,x,y) \\ &= (y+F(x)-k\int_{t-f}^{t}x(s)\mathrm{d}s)^2+kx^2 \\ &\quad + k^2\int_{-f}^{0}\int_{t+s}^{t}x^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{8}$$

则当 $t\geqslant 0$时,注意到不等式

$$2x(t)\int_{t-f}^{t}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_{t-f}^{t}[x^2(t)+x^2(s)]\mathrm{d}s=fx^2+\int_{t-f}^{t}x^2(s)\mathrm{d}s,$$

于是有

$$\begin{aligned} V'_{(7)}(t) &= -2kx(y+F(x)-k\int_{t-f}^{t}x(s)\mathrm{d}s)+2kx(y+E(t))+k^2fx^2-k^2\int_{-f}^{0}x^2(t+s)\mathrm{d}s \\ &= -2kxF(x)+k^2fx^2+2kxE(t)+2k^2x\int_{t-f}^{t}x(s)\mathrm{d}s-k^2\int_{t-f}^{t}x^2(s)\mathrm{d}s\leqslant-2kxF(x)+2k^2fx^2+2kxE(t) \\ &= -2k(xF(x)-kfx^2-xE(t)), \end{aligned}$$

由 $F(x)$的定义以及 $f(x)\geqslant 2kf$知道只要 $|x|$ 适当大,就有 $\frac{F(x)}{x}>kf+\frac{M}{x}$,亦即 $xF(x)>kfx^2+Mx$,因此当 $|x|$ 适当大时 $V'(t)<0$. 但另一方面,由 $V(t)$的定义知当 $x\to\infty$ 时 $V(t)\to\infty$ 以及当 $y\to\infty$ 时 $V(t)\to\infty$,从而 (x,y) 有界,即存在正常数 M_1 使 $|x(t)|\leqslant M_1$, $|y(t)|\leqslant M_1 (t\in R)$.

其次,再把系统(4)写成等价形式

$$\begin{cases} x'=y-F(x)+\int_{t-f}^{t}kx(s)\mathrm{d}s+E(t), \\ y'=-kx, \end{cases} \tag{9}$$

考虑系统(9)的乘积系统

$$\begin{cases} x'=y-F(x)+\int_{t-f}^{t}kx(s)\mathrm{d}s+E(t), \\ y'=-kx, \\ u'=g-F(u)+\int_{t-f}^{t}ku(s)\mathrm{d}s+E(t), \\ g'=-ku, \end{cases} \tag{10}$$

考虑 Liapunov泛函

$$W(t)=W(t,x,y,u,v)=k(x-u)^2+(y-v)^2+\int_{-f}^{0}\int_{t+s}^{t}k^2[x(\theta)-u(\theta)]^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s,$$

易见,这样定义的 $W(t)$满足定理 A的条件(i),(ii),我们指出,条件(iii)也满足,这是因为

$$\begin{aligned} W'_{(10)}(t) &= 2k(x-u)[(y-v)-(F(x)-F(u))+\int_{t-f}^{t}k(x(s)-u(s))\mathrm{d}s]-2k(x-u)(y-v)+fk^2(x-u)^2-k^2\int_{t-f}^{t}[x(s)-u(s)]^2\mathrm{d}s \\ &= -2k(x-u)[F(x)-F(u)]+fk^2(x-u)^2+2k^2(x-u)\int_{t-f}^{t}[x(s)-u(s)]\mathrm{d}s-k^2\int_{t-f}^{t}[x(s)-u(s)]\mathrm{d}s\leqslant \\ &\quad -2k(\frac{F(x)-F(u)}{x-u})(x-u)^2+2k^2f(x-u)^2, \end{aligned}$$

由 $F(x)$的定义及 $f(x)\geqslant 2kf$推知 $\frac{F(x)-F(u)}{x-u}>kf$又注意到 $W(t)$的定义,从而存在正常数 _,T使得

$$W'_{(10)}(t)\leqslant -\_(x-u)^2\leqslant -TW(t),$$

由定理 A,系统(4)存在唯一的完全一致渐近稳定的概周期解 .

参考文献

1 Zhang B. Boundedness and stability of solutions of the retarded Liénard equation with negative damping. Nonlinear Anal, 1993, 20(3): 303~ 313.

2 Zhang B. Necessary and sufficient conditions for boundedness and oscillation in the retarded Liénard equation. J Math Anal Appl, 1996, 200(2): 453~ 473.

3 林发兴. Liénard方程周期解、概周期解的存在性. 数学学报, 1996, 31(3): 314~ 318.

4 王　克. 强迫 Liénard方程的概周期解. 数学年刊, 1995, 16(4): 417~ 421.

5 Yoshizawa T. Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions. New York: Spring-Verlag. 1975. 21.

6 郑祖庥. 泛函微分程理论 . 合肥: 安徽教育出版社, 1994. 370~ 392.

(责任编辑: 黎贞崇)