DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.03.003
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (3): 166~ 168

Poincare-Miranda定理的推广*
A Generalization of Poincare-Miranda Theorem

范江华
Fan Jianghua
(广西师范大学数学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 给出 Poincare-Miranda定理的一个推广,给出满足该定理条件的集值映射的零点的单纯同伦算法和定理的构造性证明,并证明此定理与 Kakutani不动点定理等价.
关键词 Poincare-Miranda定理 零点 集值映射
中图法分类号 O241.7

Abstract A generalization of Poincare-Miranda theorem is presented. A simplicial homtopy method is established to compute the zero point of mappings. A constructive proof of the new theorem is given. The new theorem is proved to be equivalent to the Kakutani fixed theorem.
Key words Poincare-Miranda theorem, zero-point, set-valued mapping

介值定理是数学分析中著名定理, Poincare[1]证明了如下结果(用 Browder[1]的语言):

设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为 n 个变量的连续函数,其中变量 x_i 在 a_i 与 $-a_i$ 之间变动, $i=1,2,\cdots,n$, $a_i>0$. 设当 $x_i=a_i$ 时, $f_i(x)\geqslant 0$, 当 $x_i=-a_i$ 时, $f_i(x)\leqslant 0$, 则存在一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 在该处所有的 f_i 都等于 0.

Miranda证明该定理与 Brower不动点定理等价,因此上述定理被称为 Poincare-Miranda定理,最近文献[2]利用组合方法证明了上述定理.

本文给出集值映射的 Poincare-Miranda定理,并给出满足我们定理条件的集值映射的零点的单纯同伦算法,从而给出定理的构造性证明.

单纯同伦方法先对欧氏空间进行渐细单纯剖分,由一个简单映射的已知的不动点通过片状线性同伦得到所求映射的不动点,是求解非线性方程的有效方法,也是求解集值映射方程的唯一有效方法.

先介绍集值映射的一些基本定义.

定义 1[3] 设 X, Y 为拓扑空间,映射 $F: X\to 2^Y$ 称为集值映射,如果对任意的 $x\in X$, $F(x)$ 为 Y 的非空子集.

显然,单值映射为集值映射的特殊情形.

定义 2 设 X, Y 为拓扑空间,称集值映射 $F: X\to 2^Y$ 在 x_0 处上半连续,如果对 Y 中任一包含 $F(x_0)$ 的开集 V,存在 X 中的包含 x_0 的开集 U,使得任一 $x\in U$,有 $F(U)\subset V$.

称 F 在 X 上上半连续,如果 F 在 X 的每一点处上半连续.显然,若 f 为连续的单值映射,则 f 作为集值映射上半连续.

本文记 $P(A)$ 为 A 的非空紧凸子集族.设 $A\subseteq R^n$, $\mathrm{co}A$, $\overline{A}$, ∂A, $\mathrm{int}A$ 分别表示 A 的凸包、闭包、边界与内部.

$A\sim B=\{x: x\in A, x\notin B\}$, $A-B=\{x-y: x\in A, y\in B\}$.

本文用到的 J_3 剖分,完备单纯形以及完备单纯形的转轴运算都与文献[4~6]一致.

我们有下面的定理:

定理 1 设 $C=[-a_1,a_1]\times[-a_2,a_2]\cdots\times[-a_n,a_n]$,为 R^n 中方体, $f: C\to P(R^n)$ 上半连续,且当 $x_i=a_i$ 时, $f_i(x)\subset[0,+\infty)$, $x_i=-a_i$ 时, $f_i(x)\subset(-\infty,0]$, $i=1,2,\cdots,n$,则存在 $x^0\in C$,使得 $0\in f(x^0)$.

若定理 1中 f 为单值映射,则我们的定理与 Poincare-Miranda定理一致.

若 $0\in f(x^0)$,称 x^0 为 f 的零点,若 $x^0\in f(x^0)$,称 x^0 为 f 的不动点.

下面给出计算 f 的零点的单纯同伦算法,从而给出定理 1的构造性证明.

引理 设 f, C 同定理 1中的假设,则 $F: R^n\to P(R^n)$ 上半连续,且 F 与 f 有相同的零点集,其中 F 满

2001-10-15收稿.
* 广西青年科学基金资助项目.

足:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in \mathrm{int}C,\\ \omega(f(x)\cup\{x\}), & x\in \partial C,\\ \{x\}, & x\in R^n\sim C.\end{cases}$$

证明 F的上半连续性由[5]中第六章定理3.2可得.下证 f 与 F 有相同的零点集.

1) 设 x^0为 F的零点.

若 $x^0\in \mathrm{int}C$,则 x^0 为 f 的零点.

若 $x^0\in \partial C$,则存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $x_i^0=a_i$,或 $x_i^0=-a_i$.

若 $x_i^0=a_i$,此时 $x^0\in \omega(f(x^0)\cup\{x^0\})$,从而存在 $\lambda\in[0,1]$,使得

$0\in \lambda f(x^0)+(1-\lambda)\{x^0\}$,

因而 $(1-\lambda)x^0\in-\lambda f(x^0)$,而此时 $f_i(x^0)\subset[0,+\infty)$,故 $-\lambda f_i(x^0)\subset(-\infty,0]$,而 $(1-\lambda)x_i^0=(1-\lambda)a_i\geqslant 0$,因此 $(1-\lambda)x_i^0=0$,从而 $\lambda=1$,即

$0\in f(x^0)$.

$x_i^0=-a_i$时,同上可证 $0\in f(x^0)$,即 x^0为 f 的零点.

2) 若 x^0为 f的零点,显然 x^0 为 F的零点.

利用引理1我们将计算 f 的零点转化成计算 F 的零点,而 F为 n维欧氏空间的上半连续自映射,定义 $G: R^n\to P(R^n)$.使得对任一 $x\in R^n$都有 $G(x)=x-F(x)$,则有

$$G(x)=\begin{cases} \{x\}-f(x), & x\in \mathrm{int}C,\\ \omega((\{x\}-f(x))\cup\{0\}), & x\in \partial C,\\ \{0\}, & x\in R^n\sim C.\end{cases}$$

显然 $G: R^n\to P(R^n)$上半连续,因此我们可利用单纯同伦方法中的一种向量标号算法来计算 G的不动点.下面给出利用 J_3剖分和 Eaves-Saigal向量标号单纯同伦算法[4,5]来计算 G的不动点.

算法 先对 $(0,1]\times R^n$作 J_3剖分.设 $y=(t,x)$为 $(0,1]\times R^n$的 J_3剖分的一个顶点.

若 $t=1$,则令 $\Omega(y)=0$.

若 $t<1$,则取定 $G(x)$中任意一点作为 $\Omega(y)$,即当 $x\in \mathrm{int}C$时,取 $\{x\}-f(x)$中一点作为 $\Omega(y)$,当 $x\notin \mathrm{int}C$时,则令 $\Omega(y)=0$.

在剖分的每个单纯形上按重点坐标将顶点上已赋值的 Ω作仿射扩张,得到单值的分片线性映射: $\Omega: (0,1)\times R^n\to R^n$.最后按

$\mathrm{j}(t,x)=x-\Omega(t,x)$

定义的 $\mathrm{j}: (0,1]\times R^n\to R^n$为向量标号映射.

在 $\{1\}\times R^n$, $\mathrm{j}(1,x)=x$,由完备单形的定义可知存在唯一的完备单形 $\sigma_1=j_3(y,\pi,a)$是 J_3中唯一有一个完备界面在 $\{1\}\times R^n$上的完备单形,这里 $y=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$, $\pi=(0,n,\cdots,1)$, $a=(-1,-1,\cdots,-1)$.

由完备单纯形的转轴运算规则可得到一个由完备单纯形构成的无穷序列 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n,\cdots$ 记 $y^+(k)$为 σ_k的顶点,且不为 σ_{k-1}的顶点,这样我们可得到一个由完备界面的顶点构成的无穷序列 $\{y^+(n)\}$.

下面我们先证明所有的完备界面在一个有界区域内.

设 τ为 $(0,1]\times R^n$内任一完备界面,设 τ的顶点为 $y^1,y^2,\cdots,y^n$,其中 $y^i=(t_i,x^i)$, $t_i\in(0,1]$, $x^i\in R^n$.

因 C为 R^n的紧致子集,G为取紧凸值的上半连续映射,故 $G(C)$为 R^n的紧致子集,由 G的定义可知 $G(C)\cup\{0\}=G(R^n)$,因此 $G(R^n)$为 R^n的紧致子集,故存在一个紧凸集 B,使得 $G(C)\subset B$,且 $0\in B$.

若 $\tau\cap((0,1]\times B)=\varnothing$,因

$\mathrm{j}(y^i)=x^i-\Omega(y^i)$.

故对于满足

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$$

的 λ_i都有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{j}(y^i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Omega(y^i)$.

$y^i=(t^i,x^i)$,若 $t^i=1$,则 $\Omega(y^i)=0$,若 $0<t^i<1$,当 $x\in \mathrm{int}C$时 $\Omega(y^i)\in G(x^i)$,当 $x\notin \mathrm{int}C$时,有 $\Omega(y^i)=0$,因此 $\Omega(y^i)\in G(C)\cup\{0\}\subset B$,从而有 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Omega(y^i)\in B$.又因 $\tau\cap((0,1]\times B)=\varnothing$,且 τ为凸集,从而 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x^i\notin B$.故 $\mathrm{j}(y^i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的任意凸组合都不可能为零.这与 τ是完备界面矛盾.因此 $\tau\cap((0,1]\times \bar{B})\neq\varnothing$,由 B的有界性可知所有完备界面都在 $(0,1]\times R^n$的一个有界区域内.

由上可知序列 $\{y^+(n)\}$有界,又因 $y^+(n)=(t^+(n),x^+(n))$,因此序列 $\{x^+(n)\}$有界,从而序列 $\{x^+(n)\}$必有一子序列收敛到某一点,设为 x_0,由文献[5]p.202定理5.2可知 x_0为 G的不动点,从而 x_0为 F的零点,由引理可知 x_0为 f 的零点.显然 $x_0\in C$,这样我们就可算出 f的一个零点 x_0,也完成了定理的构造性证明.

下面给出计算满足定理条件的集值映射 f 的零点的算法,设计算精度为 ε,算法的具体运算步骤如下:

步骤 0 记 $\sigma(1)$在 $\{1\}\times R^n$中的全标界面为 $\tau(1)$, $\sigma(1)$与 $\tau(1)$相对的顶点为 $y^+(1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$,置 $k=1$.

步骤 1 计算 $\mathrm{j}(y^+(k))$,按照字典式取主转移

方法和 J_3 剖分的转轴运算规则表[5],得到新的完备单形 $e(k+1)=j_3(z,d,b)$,记 $e(k+1)$ 的不是 $e(k)$ 顶点的顶点为 $y^+(k+1)=(t^+(k+1),x^+(k+1))$,若 0与 $f(x(k+1))$ 距离足够小,则计算终止,否则置 $k:=k+1$,回到步 1.

下面定理为著名的 Kakutani不动点定理,此定理在数理经济学中有非常重要的应用.

定理 2 设 B 为欧氏空间 R^n 的 n 维紧凸集,$F: B\to P(B)$ 上半连续,则 F 必有不动点.

下面证明定理 1与定理 2等价.

证明 定理 1⇒定理 2

设 B 为欧氏空间 R^n 的 n 维紧凸集,$F: B\to P(B)$ 为 B 的上半连续集值映射,因 B 紧,$F: B\to P(B)$ 上半连续,从而 $F(B)$ 紧,故存在一个方体 C,使得 $F(B)\cup B\subset C$,定义 $G: C\to P(C)$ 使得 $x\in B$ 时,$G(x)=F(x)$,$x\in C\sim B$ 时,原点 O 与 x 的连线与 B 必有唯一的交点 y,令 $G(x)=F(y)$,由 G 的定义可知 $G(B)=F(B)\subset B$ 且 $G: C\to P(C)$ 上半连续,令 $f: C\to P(R^n)$,使得 $f(x)=\{x\}-G(x)$,显然 f 满足定理 1的条件,则由定理 1可知 f 在 C 中存在零点,不妨设 $0\in f(x^0)$,则 $x^0\in G(x^0)\subset B$,而当 $x^0\in B$ 时,$G(x^0)=F(x^0)$,因此 $x^0\in F(x^0)$,即 F 在 B 上有不动点.

定理 2⇒定理 1

设 f,C 同定理 1,定义 $F: C\to P(R^n)$,使得 $F(x)=x-f(x)$,则 $F: C\to P(R^n)$ 上半连续,因 C 紧,故存在紧凸集 B,满足 $F(C)\cup C\subset B$,定义 $G: B\to P(B)$ 如下

$$G(x)=\begin{cases} F(x), & x\in \mathrm{int}C,\\ \omega(F(x)\cup\{0\}), & x\in \partial C,\\ \{0\}, & x\in B\sim C.\end{cases}$$

由定理 2可知 $G: B\to P(B)$ 有不动点 x^0,显然 $x^0\in C$.

若 $x^0\in\partial C$,则 $x^0\in\omega(F(x^0)\cup\{0\})$,从而存在 $\lambda\in[0,1]$,满足 $x^0\in\lambda F(x^0)$,即 $x^0\in\lambda(\{x^0\}-f(x^0))$,设 $x^0_{i0}=a_{i0}$,因 $f_{i0}(x^0)\subset[0,+\infty)$,故 $\lambda=1$,且 $0\in f(x^0)$. 同理可证 $x^0_{i0}=a_{i0}$ 时,$0\in f(x^0)$.

若 $x^0\in\mathrm{int}C$,则 $x^0\in F(x^0)$,即 $x^0\in\{x^0\}-f(x^0)$,因此 $0\in f(x^0)$.

由上可知 f 在 C 中有零点,从而定理 2成立.

参考文献

1 Kulpa W. The Poincare-Miranda theorem. The Amer Math Mon, 1997, 104(6): 545~550.

2 Browder F. Fixed point theory and nonlinear problems. Bull Amer Math Soc, 1983, 9(1): 1~39.

3 Aubin J P. Optima and Equilibria: an introduction to nonlinear analysis. New York: Springer-Verlag, 1998.

4 Dang C. Triangulations and Simplicial Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

5 王则柯.单纯不动点算法基础.广州:中山大学出版社, 1986.

6 范江华,黎培兴. Leray-Schauder不动点的计算.科学通报, 1998, 43(16): 1723~1725.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 165页 Continue from page 165)

检验定理 2的条件得到满足,从而可知(11)存在平稳振荡.

4 结束语

由于广义系统有着许多实际背景,因而一直成为人们研究的热点.广义系统的基本理论至今尚未完全建立起来,作为广义系统理的重要分支广义系统的周期解理论必将成为人们研究的又一课题,本文就导数向量的系数阵为定常奇异阵的情形进行讨论,系统阵为时变广义线性系统的周期解存在性较为复杂,有待进一步的研究.

参考文献

1 Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solution and Almost Periodic Solutions. Springer-Verlag, 1975.

2 王 联,王慕明.高维周期耗散系统中的一个平稳振荡定理.中国科学(A辑), 1982, 607~614.

3 王慕秋,李黎明.非线性周期性大系统的平稳振荡.应用数学学报, 1991, 14(2): 220~228.

4 郜奉欣,扬玉华.时滞周期系统解的存在性.应用数学学报, 1990, 13(2): 198~206.

5 张 毅,章 毅,王慕秋.时变线性大系统在结构扰动下的稳定性与平稳振荡问题.应用数学学报, 1988, 11(4): 404~409.

6 梁家荣.广义系统的周期解.控制理论与应用, 1997, 14(4): 595~598.

7 梁家荣.广义系统的概周期解.科学通报, 1998, 43(2): 325~328.

(责任编辑:黎贞崇)