DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (3): 169~170, 173

时滞 Duffing方程的概周期解*

Almost Periodic Solutions of Delayed Duffing Equations

冯春华
Feng Chunhua

(广西师范大学数学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 结合运用压缩映射原理,研究时滞 Duffing方程概周期解的存在唯一性.

关键词 时滞 Duffing方程 压缩映谢 概周期解 存在唯一
中图法分类号 O175

Abstract By means of contraction mapping principle, the existence and uniqueness of almost periodic solutions of delayed Duffing equations is investigated.

Key words delayed Duffing equations, contraction mapping, almost periodic solution, existence and uniqueness

文献[1,2]分别研究了下述非线性 Duffing方程

$$\ddot{x} - x - x^3 = f(t), \qquad (1)$$

$$\ddot{x} - x + x^3 = f(t) \qquad (2)$$

概周期解的存在性.文献[3]结合运用变分方法.考虑下述 Duffing方程

$$\ddot{x} - a(t)x - V_x{}'(t,x) = h(t) \qquad (3)$$

的概周期解.最近,文献[4]把方程(1)、(2)推广到更一般且含有时滞的情形,即考虑下述方程

$$\ddot{x} - x \pm x^m(t-r) = f(t), \qquad (4)$$

结合运用不动点原理,文献[4]证明了方程(4)在一定条件下,存在唯一的概周期解.本文考虑下述时滞 Duffing方程

$$\ddot{x} - a(t)x + g(t,x(t-\tau)) = f(t), \qquad (5)$$

结合运用压缩映射原理,研究方程(5)概周期解的存在唯一性.

设 $C = C([-\tau,0],R^2)$ 表示全体连续映射 $[-\tau,0] \to R^2$ 构成的 Banach空间,其范数定义为通常的上确界范数.记 $C_H = \{\varphi: \varphi \in C$ 且 $\|\varphi\| < H, H \in R^+\}$.在方程(5)中,设 $g(t,\varphi)$ 关于 t 对 $\forall \varphi \in C_H$ 是一致概周期的,其初始条件为 $x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau,0]$.则我们有

定理 1 在方程(5)中,设 $a(t)$ 为定正连续概周期函数,$f(t)$ 为实连续概周期函数,记 $\sup_{t\in R}|f(t)| = b$. $g(t,\varphi)$ 满足 Lipschitz条件,即存在定正概周期函数 $L(t)\left(0 < L(t) < \frac{\overline{a(t)}}{2}\right)$,使得

$$|g(t,\varphi) - g(t,\psi)| \leqslant L(t)|\varphi - \psi|, \qquad (6)$$

则方程(5)存在唯一的概周期解.

证明 作变换 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,则方程(5)化为下述等价系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ a(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -g(t,x_1(t-\tau)) + f(t)\end{pmatrix}, \qquad (7)$$

令 $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,则 P 是正交矩阵,且 $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.再作变换 $y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$,于是 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}y_1 + y_2\\ -y_1 + y_2\end{pmatrix}$,代入(7)式得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\dot{y}_1 + \dot{y}_2\\ -\dot{y}_1 + \dot{y}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ a(t) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1 + y_2\\ -y_1 + y_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -g\left(t,\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1(t-\tau) + y_2(t-\tau))\right) + f(t)\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

以下为书写简洁,记 $\Lambda = a(t)$, $y(t-\tau) = y_1(t-\tau) + y_2(t-\tau)$,整理(8)式得

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-\Lambda & 1-\Lambda\\ -1+\Lambda & 1+\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} +$$

2001-11-28收稿, 2002-04-23修回。
* 广西自然科学基金项目资助。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} g(t,\frac{1}{\sqrt{2}}y(t-f)) - f(t) \\ -g(t,\frac{1}{\sqrt{2}}y(t-f)) + f(t)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

对 $y\in R^2$, 定义它的范数为 $\|y\| = \max\{|y_1|, |y_2|\}$. 下面用压缩映射原理来证明定理的结论.

记 $B=\{h(t)\,|\,h(t)=\begin{pmatrix}h_1(t)\\ h_2(t)\end{pmatrix}: R\to R^2$ 是实连续概周期函数$\}$. 对任意的 $h\in B$, 其范数定义为 $\|h\| = \sup\{|h(t)|, t\in R\}$, 则 B 在此范数下成为一个 Banach 空间.

首先注意到系统

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-T & 1-T \\ -1+T & 1+T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

的系数矩阵的特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{T}$, 从而对任意的 $h=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}\in B$, 下述线性非齐次概周期方程

$$\begin{pmatrix}\dot y_1\\ \dot y_2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-T & 1-T \\ -1+T & 1+T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} g(t,\frac{1}{\sqrt{2}}h(t-f)) - f(t) \\ -g(t,\frac{1}{\sqrt{2}}h(t-f)) + f(t)\end{pmatrix} \tag{10}$$

有唯一概周期解 $y_h(t)$, 它可以表示为

$$y_h(t) = \begin{pmatrix} y_{h_1}(t)\\ y_{h_2}(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)}(g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f)) - f(s))\,ds \\ -\int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)}(g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f)) - f(s))\,ds\end{pmatrix}, \tag{11}$$

现在定义映射 $T: B\to B$ 如下

$$Th(t) = y_h(t), \forall h\in B, \tag{12}$$

其中 $y_h(t)$ 由 (11) 式唯一确定, 选取 B 中的一个闭凸子集如下 (暂时固定 $t=t_0$ 使 $T=a(t_0)$):

$$B_0 = \{h\,|\,h\in B \text{ 且 } \|h-h_0\| \leqslant \frac{b}{2\sqrt{T}}\}, \tag{13}$$

其中

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)} f(s)\,ds \\ \int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)} f(s)\,ds\end{pmatrix}, \tag{14}$$

则 $\|h_0\| = \sup_{t\in R}\max\{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)}|f(s)|\,ds, \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)}|f(s)|\,ds\}$

$$\leqslant \sup_{t\in R}\max\{\frac{b}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)}\,ds, \frac{b}{\sqrt{2}}\int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)}\,ds\} = \frac{b}{\sqrt{2T}}, \tag{15}$$

又由 B_0 的定义, 对任意的 $h\in B_0$, 就有

$$\|h\| = \|h-h_0+h_0\| \leqslant \|h-h_0\| + \|h_0\| \leqslant \frac{b}{2\sqrt{T}} + \frac{b}{\sqrt{2T}} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{T}}.$$

下证 $T: B_0\to B_0$, 事实上, 对任意的 $h\in B_0$, 由 T 的定义以及 (11), (12) 和 (14) 式得

$$Th(t) - h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)} g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f))\,ds \\ -\int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)} g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f))\,ds\end{pmatrix}, \tag{16}$$

利用 (6) 式得

$$|g(t,\frac{1}{\sqrt{2}}h(t-f))| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}L(t)(|h_1(t-f)| + |h_2(t-f)|) \leqslant \sqrt{2}L(t)\|h\|, \tag{17}$$

由 (16), (17) 式可得

$$\|Th-h_0\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2T}}\cdot\sqrt{2}L(t)\|h\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2T}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{T}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{T}} = \frac{b}{2\sqrt{T}}.$$

因此, 当 $h\in B_0$ 时有 $Th\in B_0$, 即 $T: B_0\to B_0$. 再证 T 在 B_0 中是一个压缩映射. 对任意 $h, j\in B_0$, 由 (11), (12) 式得

$$Th(t) - Tj(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{t} e^{-\sqrt{T}(t-s)}(g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f)) - g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}j(s-f)))\,ds \\ -\int_{t}^{+\infty} e^{-\sqrt{T}(s-t)}(g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}h(s-f)) - g(s,\frac{1}{\sqrt{2}}j(s-f)))\,ds\end{pmatrix},$$

再次利用 (6) 式得

$$\|Th-Tj\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2T}}\cdot\frac{\sqrt{T}}{2}\cdot\sqrt{2}\|h-j\| = \frac{1}{2}\|h-j\|.$$

这说明 T 是一个压缩映射, 从而 T 在 B_0 中有唯一不动点 $y\in B_0$ 使 $Ty=y$, 由 (10), (11) 两式知这个 $y=y(t)$ 即为 (8) 的唯一概周期解, 其表达式为

(下转第 173页 Continue on page 173)

所以 $(x_N - 2)\sum_{k=N}^{n} F_k^{(N)} \leqslant x_{n+1} - x_N, \frac{x_{n+1}}{x_n} - 1 \leqslant F_n^{(N)}$, (7)

又因为 $x_N - 2 > 0$,所以如 $\{x_n\}_{n\geqslant N}$ 有界则 $\sum_{k=N}^{\infty} F_k^{(N)} < \infty$. 由引理,此式等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)} < \infty$.

反之,如 $\sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)} < \infty$,则由(7)式得

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)} < \infty.$$

又因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1$ 与 $\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 是等价无穷小量,所以 $\sum_{n=N}^{\infty} \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} < \infty$. 因此,它的部分和 $S_n = \ln x_{n+1} - \ln x_N$ 有界,等价于 $\{x_n\}$ 有界.

综上所述得: $\{x_n\}$ 有界等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda + d_n}{\lambda_n} + \frac{u_n}{\lambda_n}\frac{\lambda + d_{n-1}}{\lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{u_n u_{n-1}\cdots u_2}{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2}\frac{\lambda + d_1}{\lambda_1}\right) < \infty.$$

等价于

$$\bar{R} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\left((1+d_n)/\lambda_n + u_n/\lambda_n(1+d_{n-1})/\lambda_{n-1} + \cdots + u_n u_{n-1}\cdots u_2(1+d_1)/(\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1)\right) < \infty.$$

故 $\{x_n\}$ 无界,即 Q 零流出的充分必要条件是: $\bar{R} = \infty$. 定理 1证毕.

参考文献

1 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. Trans Ann Math Soc, 1940, 48 488~ 515.

2 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann Math, 1957, 65 (3): 527~ 570.

3 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on L. Acta Math, 1957, 97: 1~ 46.

4 侯振挺,邹捷中,张汉君等.马尔可夫过程的 Q-矩阵问题.长沙: 湖南科学技术出版社, 1994.

5 Anderson W J. Continuous-time Markov chains. Series in Statistics, New York: Springer-Verlag. 1991.

6 侯振挺,刘再明,张汉君等.生灭过程.长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 170页 Continue from page 170)

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\overline{\top}(t-s)}\left(g\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}y(s-\tau)\right) - f(s)\right)\mathrm{d}s \\ -\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\overline{\top}(s-t)}\left(g\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}y(s-\tau)\right) - f(s)\right)\mathrm{d}s \end{pmatrix}. \quad (18)$$

最后,由 $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1(t) + y_2(2))$ 就是方程(5)的唯一概周期解.

例 考虑方程

$$\ddot{x} - (4 - \sin t - \cos\sqrt{2}t)x + \frac{(\cos t + \cos\sqrt{2}t)x(t-\tau)}{8(1 + x^2(t-\tau))} = f(t). \quad (19)$$

这里,$f(t)$ 是实连续概周期函数,$|f(t)| \leqslant b, t \in R, a(t) = 4 - \sin t - \cos\sqrt{2}t$ 是定正连续概周期函数,易见 $g(t, x(t-\tau)) = \frac{(\cos t + \cos\sqrt{2}t)x(t-\tau)}{8(1 + x^2(t-\tau))}$ 满足条件(6),故由定理 1知方程(19)存在唯一的概周期解.

参考文献

1 Berger M S, Chen Y Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations. Nonlinear Analysis TMA, 1992, 19(3): 249~ 257.

2 Zeng W Y. Almost periodic solutions for nonlinear Duffing equations. Acta Mathematicae Sinica, New series, 1997, 13 (3): 373~ 380.

3 Yuan R. Existence of almost periodic solutions of Duffing equations. J Beijing Normal University (Natural Science), 1996, 32(3): 296~ 301.

4 王金义.具有时滞的非线性微分方程的概周期解的存在性及唯一性.数学学报, 1999, 42(3): 511~ 518.

(责任编辑: 黎贞崇)