

符拉索夫地基上筏基分析的样条无单元法*

Spline Element-free Method for Analysis of Floating Plates on Vrasov Foundation

韦斌凝

Wei Binning

(广西大学土木建筑工程学院 南宁市西乡塘路 530004)

(College of Civil Engi. and Architecture, Guangxi Univ., Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 将样条无单元法应用于筏基中,建立按厚板分析筏基的计算格式,考虑筏板与符拉索夫地基的相互作用,编制相应的计算程序,并给出了算例。利用样条无单元法分析筏基,不仅计算简便,精度高,而且未知量的数目很少。

关键词 符拉索夫地基 筏基 样条无单元法

中图分类号 TU471.15

Abstract A spline element-free method is developed for analysis of floating plates on Vrasov foundation. The shear deformation of the plate is considered in the analysis. The calculating process is given. The results of the numerical example meet with the demand of engineering, and show that the method discussed is simple and accurate.

Key words Vrasov foundation, floating plates, spline element-free method

有限单元法虽然已成为工程结构分析的有力工具,但其计算结果不是应力、应变不连续,就是难以进行结构的开裂计算,再者,其前处理也比较困难。样条无单元法是用样条函数和正交函数的乘积作为位移函数,通过变分原理导出结构的刚度矩阵,建立以待定系数为未知量的线性代数方程,求出结构的位移,从而求出结构的内力等物理量的方法。这种方法,不需划分单元或网格,故称无单元法(或无网格法)。在有限元法中,未知量的数目与所划分的单元数有关;而样条无单元法的未知量数目只与样条结点有关,样条结点可自行确定,一般很少即可满足精度要求,故未知量很少,同时,由于样条函数的紧凑性,所形成的刚度矩阵的半带宽很小,例如,当采用三次样条函数时,刚度矩阵的半带宽只为4。本文将样条无单元法应用于符拉索夫地基上筏基的分析,能够克服有限元法的上述缺陷。样条无单元法采用分段光滑的函数来近似场函数,它既保留了有限单元法的一些特点,又摆脱了有限单元法的限制,是一种十分有效的方法。

1 符拉索夫地基的基本方程

图1所示一厚度为 H ,置于不可压缩下卧层上的弹性地基。假设在竖向外力 P 的作用下,其中任何一点只有竖向位移 w ,而 x 、 y 方向无线位移,亦即:

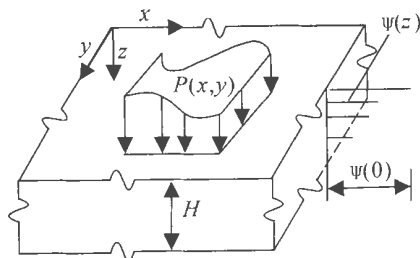


图1 弹性地基

Fig. 1 Elastic foundation

$$u(x, y, z) = 0, v(x, y, z) = 0, w(x, y, z) = (x, y) J(z), \quad (1)$$

其中 $J(z)$ 是表示竖向位移沿深度衰减规律的函数,称为竖向位移分布函数,当地基压缩层足够大时,可取:

$$J(z) = \frac{sh\sqrt{H-z}}{sh\sqrt{H}}, \quad (2)$$

则平衡方程可表示为:

$$25^2 w_1 - K w_1 + P_1 = 0, \quad (3)$$

2002-05-09收稿, 2002-07-29修回。

* 广西自然科学基金资助项目。

其中 $P_1 = P(x, y)J(0)$; K 是与地基压缩变形有关的参数; t 是与地基剪切变形有关的参数; 5^2 是拉普拉斯算子。

$$K = \frac{E_0}{1 - \frac{1}{6}} \int_0^H h^2(z) dz,$$

$$t = \frac{E_0}{4(1 + \frac{1}{6})} \int_0^H h^2(z) dz.$$

由式(3)可以看出,符拉索夫地基模型比文克尔地基模型多出 $25^2 w_1$ 一项,这一项考虑了剪应力对弹性地基变形状态的影响。参数 K 、 t 决定了符拉索夫地基的工作性质,所以符拉索夫地基通常又称为双参数地基。

2 筏板的基本方程

如果筏板是一个小变形的均质等厚的各向正交异性弹性厚板,则它的本构方程为:

$$\begin{cases} \{N\} = [R]\{X\} + \{\Gamma\}, \\ \{M\} = [D]\{x\} + \{T\}, \\ \{Q\} = [C]\{y\}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\{N\} = [N_x \ N_y \ N_{xy}]^T$, $\{M\} = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T$, $\{Q\} = [Q_x \ Q_y]^T$, $\{X\} = [X_x \ X_y \ X_{xy}]^T$, $\{x\} = [x_x \ x_y \ x_{xy}]^T$, $\{V\} = [V_x \ V_y]^T$,

$$[R] = \begin{bmatrix} R_x & R_1 & 0 \\ R_1 & R_y & 0 \\ 0 & 0 & R_{xy} \end{bmatrix},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \text{diag}(C_{11}, C_{22}).$$

其中 C_{11} 及 C_{22} 为剪切模量,即:

$$C_{11} = hb^4 / K^t, C_{22} = hb^3 / K^t,$$

$$K^t = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) z dz,$$

其中 $f(z)$ 为横向剪切变形沿板厚度的变化规律。

$$\{\Gamma\} = [\frac{R_1}{2R_1^*} q \quad \frac{R_1}{2R_1^*} q \quad 0],$$

$$\{T\} = [\frac{D_1}{2C_1^*} q \quad \frac{D_1}{2C_1^*} q \quad 0],$$

其中 $C_1^* = A_1 h / K^e$, $C_2^* = A_2 h / K^e$, $R_1^* = A_1 h / K^e$, $R_2^* = A_2 h / K^e$, $A_1 = \frac{1}{2} \int_{-y}^y E_x / 2(z_x + \frac{1}{2} z_y - yz)$, $A_2 = \frac{1}{2} \int_{-x}^x E_z / 2(z_y + \frac{1}{2} z_x - xy)$, $K^e = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} B(z) dz$, $K^e = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} B(z) dz$,

其中 h 为板厚, $\frac{1}{2}$ 为泊板比, E_z 为 z 方向的弹性模量, $B(z)$ 为挤压变形沿板厚度的变化规律, M_x 、 M_y 及 M_{xy} 为厚板的弯矩和扭矩, Q_x 及 Q_y 为横向剪力, N_x 、 N_y 及 N_{xy} 为板中面的薄膜内力,厚板的几何方程:

$$\begin{cases} x_x = -LJ_x / L_x, x_y = -LJ_y / L_y, \\ x_{xy} = -\frac{1}{2}(LJ_x / L_y + LJ_y / L_x), \\ V_x = Lw / L_x - J_x, \\ V_y = Lw / L_y - J_y, \\ X_x = \frac{Lw}{L_x}, X_y = \frac{Lw}{L_y}, X_{xy} = \frac{Lw}{L_y} + \frac{Lw}{L_x}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 u 、 v 及 w 为厚板的位移分量, J_x 及 J_y 为变形前垂直于厚板中面的直线在变形后的转角。

3 浮筏基础厚板样条无单元法分析

3.1 筏板离散化及位移函数的选取

对弹性地基上的筏板在区间 $[0, a]$ 内进行单样条离散化见(图2),将区间 $[0, a]$ 分为 N 等分。 $0 < x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N = a$, $x_i = x_0 + ih$, $h = x_{i+1} - x_i = a / N$,

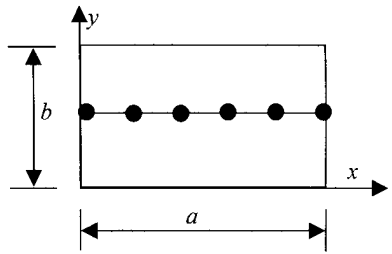


图2 地基的样条离散化

Fig. 2 Spline discretization of foundation

则它的位移函数可取为:

$$\begin{cases} u = \sum_{j=1}^V \sum_{i=-1}^{m-1} u_{ij} H_i(x) X_j(y) = [X] \otimes [H] \{u\}, \\ v = \sum_{j=1}^V \sum_{i=-1}^{m-1} v_{ij} H_i(x) Y_j(y) = [Y] \otimes [H] \{v\}, \\ w = \sum_{j=1}^V \sum_{i=-1}^{m-1} w_{ij} H_i(x) X_j(y) = [Z] \otimes [H] \{w\}, \\ J_x = \sum_{j=1}^V \sum_{i=-1}^{m-1} u_{ij} H_i(x) \Theta_j(y) = [\Theta] \otimes [H] \{J_x\}, \\ J_y = \sum_{j=1}^V \sum_{i=-1}^{m-1} J_{yij} H_i(x) H_j(y) = [H] \otimes [H] \{J_y\}, \end{cases}$$

其中 $[H] = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ \dots \ H_{m+1}]$; $H_i(x)$ 为一组三次 B 样条函数组成的基函数,具体形式参见文献 [1]; $[X] = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_r]$, $[Y] \ [Z] \ [\Theta]$ $[H]$ 以此类推; x_m 、 Y_m 、 Z_m 、 Θ_m 、 H_m 为满足边界条件的正交函数,本文取梁的振型函数; \otimes 为矩阵的直接乘积运算符。

3.2 筏板的总势能泛函

工程中,筏板常采用厚板,则图2所示筏板的总势能泛函可表示为:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (X^T [R] X + x^T [D] x + V^T [C] V +$$

$$\begin{aligned} & x^T \Gamma + x^T T) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b w p dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b (w [0, \\ & y] Q_{x=0} + w [a, y] Q_{x=a} + w [x, 0] Q_{y=0} + \\ & w [x, b] Q_{y=b}) dx + \frac{1}{2} (w_A R_A + w_B R_B + w_C R_C + \\ & w_D R_D) - \int_0^a \int_0^b U^T q dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

在(6)式的各项中:第1项是筏板的应变能;第2项至第5项是地基的应变能,其中: $p = kw - 2\delta^{-2}w$, $Q_{x=0}$, $Q_{x=a}$, $Q_{y=0}$ 和 $Q_{y=b}$ 分别是地基作用在板的 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 边界上单位长度上的反力,它们可表示为:

$$\begin{cases} Q_{x=0} = 2t(T_w - \frac{L_w}{L_x} - \frac{1}{2\Gamma} \frac{L_w^2}{L_y^2})_{x=0}, \\ Q_{x=a} = 2t(T_w - \frac{L_w}{L_x} - \frac{1}{2\Gamma} \frac{L_w^2}{L_y^2})_{x=a}, \\ Q_{y=0} = 2t(T_w - \frac{L_w}{L_y} - \frac{1}{2\Gamma} \frac{L_w^2}{L_x^2})_{y=0}, \\ Q_{y=b} = 2t(T_w - \frac{L_w}{L_y} - \frac{1}{2\Gamma} \frac{L_w^2}{L_x^2})_{y=b}; \end{cases} \quad (7)$$

R_A, R_B, R_C, R_D 分别是地基作用在筏板的 A, B, C, D 4个角点上的反力,这些反力可用下式表示:

$$\begin{cases} R_A = -\frac{1}{2} w_A, \\ R_B = -\frac{1}{2} w_B, \\ R_C = -\frac{1}{2} w_C, \\ R_D = -\frac{1}{2} w_D, \end{cases} \quad (8)$$

第6项为广义横向分布外力 q 的势能,其中:

$$\begin{aligned} U &= [u \ v \ w \ H_x \ J_y]^T, \\ q &= [q_x \ q_y \ q_z \ m_x \ m_y]^T. \end{aligned} \quad (9)$$

将(7)~(9)式代入(6)式可得:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (\{W\}^T [A]^T [R] [A] \{W\} + \\ & \{W\}^T [B]^T [D] [B] \{W\} + \{W\}^T [H]^T [C] [H] \{W\} + \\ & \{W\}^T [A]^T \Gamma + \{W\}^T [B]^T \Gamma) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{w\}^T \cdot \\ & (([Z]^T \otimes [H]^T) (K [Z] \otimes [H]) - 2t([Z]^T \otimes [H'] + \\ & [Z''] \otimes [H])) \{w\} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b 2t\{w\} (([Z]^T \otimes \\ & [H(0)]^T) (a [Z] \otimes [H(0)] - ([Z] \otimes [H'(0)] - \\ & \frac{1}{2\Gamma} [Z''] \otimes [H(0)]^T)) \{w\} dy + \frac{1}{2} \int_0^a 2t\{w\}^T (([Z]^T \\ & \otimes [H(0)]^T) (a [Z] \otimes [H(a)] + ([Z] \otimes [H'(a)] - \\ & \frac{1}{2\Gamma} [Z''] \otimes [H(a)])) \{w\} dy + \frac{1}{2} \int_0^a 2t\{w\}^T (([Z(0)]^T \\ & \otimes [H]^T) (a [Z(0)] \otimes [H] - ([Z'(0)] \otimes [H] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Gamma} [Z(0)] \otimes [H'])) \{w\} dx + \frac{1}{2} \int_0^a 2t\{w\}^T (([Z(b)]^T \\ & \otimes [H]^T) ([Z(b)] \otimes [H] + [Z'(b)] \otimes [H] - \\ & \frac{1}{2\Gamma} [Z(b)] \otimes [H'])) \{w\} dx - \frac{t}{4} \{w\}^T (([Z(0)]^T \otimes \\ & [H(0)]^T) ([Z(0)] \otimes [H(0)] - ([Z(b)]^T \otimes \\ & [H(0)]^T) ([Z(b)] \otimes [H(0)] + ([Z(0)]^T \otimes \\ & [H(a)]^T) ([Z(a)] \otimes [H(a)] + ([Z(b)]^T \otimes \\ & [H(a)]^T) ([Z(b)] \otimes [H(a)])) \{w\} - \int_0^a \int_0^b [N]^T q dx dy, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $[N]^T = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_r]^T$,
 $[A]^T = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_r]^T$,
 $[B]^T = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_r]^T$,
 $[N]_m^T = [X_m H_x \ Y_m H_y \ Z_m H_z \ \Theta H_\theta \ H_m H_\eta]^T$,
 $\{1 \leq m \leq r, -1 \leq i \leq N+1\}$,
 $[A]_m^T = \begin{bmatrix} X_m H_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_m H_y & 0 & 0 & 0 \\ X_m H_x & Y_m H_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \{1 \leq m \leq r, \\ -1 \leq i \leq N+1\}$,
 $[B]_m^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Theta_m H_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -H_m H_\eta \\ 0 & 0 & 0 & X'_m H_x & -H_m H_\eta \end{bmatrix},$
 $\{1 \leq m \leq r, -1 \leq i \leq N+1\}$,

在上式各式中,不仅计入了横向剪切变形 (V_x, V_y) 的影响,而且也考虑了挤压变形的影响 (Γ, p);不仅考虑了地基上筏板各角点反力的影响,而且也考虑了筏板各边剪力的影响.

3.3 刚度方程

由最小势能原理 $\frac{\delta \Pi}{\delta \{W\}} = 0$ 可得刚度方程为:

$$\begin{aligned} [G] \{W\} &= \{f\}. \\ \text{其中 } [G] &\text{是刚度矩阵, } \{f\} \text{是荷载向量} \\ [G] &= [G_{mn}], m, n = 1, 2, \dots, V. \\ [G_{mn}] &= [S_{ij}]^{mn}, i, j = 0, 1, 2, \dots, N. \\ [S_{ij}]_{mn} &= \begin{bmatrix} S_{aa} & S_{ab} & S_{ac} & S_{ad} & S_{ae} \\ S_{ba} & S_{bb} & S_{bc} & S_{bd} & S_{be} \\ S_{ca} & S_{cb} & S_{cc} & S_{cd} & S_{ce} \\ S_{da} & S_{db} & S_{dc} & S_{dd} & S_{de} \\ S_{ea} & S_{eb} & S_{ec} & S_{ed} & S_{ee} \end{bmatrix}_{mn} \end{aligned}$$

其中 $S_{aa} = R_x F_{y1}(i, j) [C_x] + R_{xy} C_{y1}(i, j) (F_x)$,
 $S_{ab} = R_1 F_y(i, j) [H_x] + R_{xy} H_{y1}(j, i) [H_x]$,
 $S_{ac} = S_{ad} - S_{ae} = 0$,
 $S_{ib} = R_y F_{y2}(i, j) [F_x] + 2R_{xy} F_{y2}(i, j) (C_x)$, $S_{bc} = S_{bd} - S_{be} = 0$,
 $S_{cc} = C_{11} F_y(i, j) [C_x] + C_{22} C_y(i, j) [F_x] - 2t F_y(i,$

$$j)(B_x) + B_y(i, j) [F_x] + 2t(\mathbb{T}_{F_y}(i, j) [g_x] - F_y(i, j)(g_{x1}) - \frac{1}{2}g_y(i, j) [B_x]) + F_y(i, j) [g_{xa1}) - \frac{1}{2}B_y(i, j) [B_{xa}) - 2t(\mathbb{T}_{g_y}(i, j) [F_x] - g_{y1}(i, j) (F_x) - \frac{1}{2}g_y(i, j) [B_x] + \mathbb{T}_{g_{yb}}(i, j) [F_x]) + g_{yb1}(i, j) [F_x]) - \frac{1}{2}g_{yb}(i, j) [B_x]) - \frac{t}{2}(g_y(i, j) [g_x] + g_{yb}(i, j) (g_x) - g_y(i, j) [g_{xa}] + g_{yb}(i, j) [B_{xa}]),$$

$$S_{cd} = -C_{11}L_{y1}(i, j) [H_x]^T, \\ S_{ce} = -C_{22}H_{y3}(j, i) [F_x]^T, \\ S_{dd} = D_x F_{y3}(i, j) [C_x] + D_1 C_{y4}(i, j) [F_x] + C_{11} F_{y3}(i, j) [F_x], \\ S_{de} = D_1 F_{y1}(i, j) [H_x]^T + D_{xy} H_{y4}(j, i) [H_x], \\ S_{ee} = D_x F_{y5}(i, j) [F_y] + D_{xy} C_{y4}(i, j) [C_x] + C_{22} F_{y4}(i, j) [F_x],$$

$$\{f\} = [\{f\}_1^T \quad \{f\}_2^T]^T + D_{xy} F_{y4}(i, j) [C_x] + C_{22} F_{y4}(i, j) [F_x], \\ \{f\}_m = \int_0^a \int_0^b ([N]_m^T q - \frac{1}{2} [A]_m \Gamma - \frac{1}{2} [B]_m^T T) dx dy.$$

其中

$$[A_x] = \int_0^a [H'']^T [H] dx, [B_x] = \int_0^a [H]^T [H''] dx, \\ [C_x] = \int_0^a [H']^T [H'] dx, [F_x] = \int_0^a [H]^T [H] dx, \\ A_y = \int_0^b [Z'']^T [Z''] dy, [B_x] = \int_0^b [Z]^T [Z''] dy, \\ C_y = \int_0^b [Z']^T [Z'] dy, [F_x] = \int_0^b [Z]^T [Z] dy, \\ [g_x] = [H(0)]^T [H(0)], \\ [g_{x1}] = [H(0)]^T [H'(0)], \\ [g_{xa}] = [H(a)]^T [H(a)], \\ [g_{xa1}] = [H(a)]^T [H'(a)], \\ g_y = [Z(0)]^T [Z(0)], \\ [g_{y1}] = [Z(0)]^T [Z'(a)], \\ g_{yb} = [Z(b)]^T [Z(b)], \\ [g_{yb1}] = [Z(b)]^T [Z'(b)],$$

其中 $[A_x] [B_x] [C_x] [F_x] F_{y1} F_{y3} F_{y4} C_{y1} C_{y3} C_{y4} C_{y5} H_{y1} H_{y3} H_{y4} I_{y1} L_{y1} L_{y1}$ 的具体形式参见文献 [1]

总刚度方程建立后,通过求解,可求得结构样条结点参数向量,从而求得筏板的位移和内力。

4 算例

1个自由放置在符拉索夫地基上的筏板,承受满布均布荷载,如图 3所示,已知: $a/b = 0.5, d/l_a = 0.3$,地基参数 $= 1.5, \alpha_0 = 0.4$,板的泊松比为 $\nu = 0$,地基压缩层足够大,地基与板的相对刚度为 1,其中 D 是板的弯曲刚度,求筏板的挠度和弯矩。

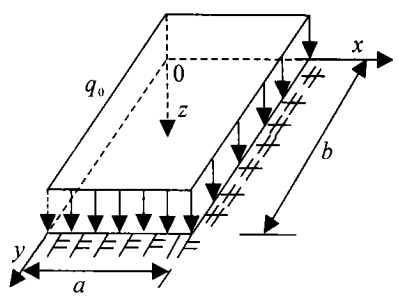


图 3 符拉索夫地基上的筏板

Fig. 3 A floating plate on Vrasov foundation

选取弹性地基的竖向分布函数为:

$$J(z) = \frac{shV(H-z)}{shVH},$$

本算例结果与其他方法的结果见表 1.

$$(x = a/2, y = b/2),$$

表 1 本算例结果

Table 1 Results of calculation

方法 Method	$\frac{E_0 w}{q_0}$	$\frac{M_x}{q_0}$	$\frac{M_y}{q_0}$
本文 This paper	0.6874	0.0328	0.0671
有限元法 Finite element	0.6797	0.0319	0.0663
文献 1(薄板理论) Reference 1 (thin plate)	0.3597	0.0300	0.0640
文献 2(薄板理论) Reference 2 (thin plate)	0.3713	0.0289	0.0500

5 结束语

本文在对筏板的分析中,考虑了横向剪切变形及挤压变形的影响,在对筏板与符拉索夫地基的相互作用分析中,考虑了筏板各角点反力及筏板各边剪力影响,计算结果能够较接近实际情况,用样条无单元法分析浮筏基础,计算简单,未知数量少,精度高,是一种十分有效的方法。

参考文献

- 秦荣. 结构力学的样条函数方法. 南宁: 广西人民出版社, 1985.
- 秦荣. 样条子域法. 上海力学, 1994, (3): 43- 46.
- CHEUNG Y K. 结构力学的有限条法. 北京: 人民交通出版社. 1983.
- 徐芝纶. 弹性力学. 北京: 高等教育出版社, 1988.
- 何福保, 沈亚鹏. 板壳理论. 西安: 西安交通大学出版社, 1993.
- 王磊. 中厚板与试函数. 工程力学, 1984, (1): 72- 76.
- 胡海昌. 弹性力学的变分原理及应用. 北京: 科学出版社, 1981.

(责任编辑: 黎贞崇)