DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (4): 259~ 261

Lehmer DH数与其逆之差的分布性质*
On the Distribution Property of Lehmer DH Number

高 丽
Gao Li

(延安大学数学与计算机科学院 陕西延安 716000)
(College of Math.& Comp. Sci., Yan'an University, Yan'an, Shaanxi, 716000, China)

摘要 设素数 $p\geqslant 3$,对模 p 的任一原根 x,且 $1\leqslant x<p$,一定存在模 p 的唯一的原根 $\bar{x}$ 且 $1\leqslant \bar{x}<p$,使得 $x\bar{x}\equiv 1\pmod{p}$.若 x 与 $\bar{x}$ 具有相反的奇偶性,则 x 就称为 Lehmer DH数.本文利用广义 Kloostermann和估计与三角和估计研究模 p 剩余系中 Lehmer DH数与其逆之差的分布.
关键词 Lehmer DH数 分布性质 原根 广义 Kloostermann和 渐近公式
中图法分类号 O156.4

Abstract Let $p\geqslant 3$ be a prime, for each primitive root x modulo p with $1\leqslant x<p$, it is clear that there exists one and only one primitive roor $\bar{x}$ modulo p with $1\leqslant \bar{x}<p$ such that $x\bar{x}\equiv 1\pmod{p}$. The number x is called as Lehmer DH mumber if x and $\bar{x}$ are of opposite parity. This paper is to study the distribution property of Lehmer DH number by using the estimation of general Kloostermann sum and trigonometric sum.
Key words Lehmer DH number, distribution property, primitive root, kloostermann sum, asymptotic formula

1 主要结论

设素数 $p\geqslant 3$,对模 p 的每一原根 x 且 $1\leqslant x<p$,必存在唯一的模 p 的原根 $\bar{x}$ 且 $1\leqslant \bar{x}<p$,使得 $x\bar{x}\equiv 1\pmod{p}$.若 x 与 $\bar{x}$ 具有相反的奇偶性,则 x 就称为 Lehmer DH数. Lehmer DH数首先是由 Lehmer DH在文献[1]中提出,张文鹏教授在文献[2]中对它进行了推广,关于它的分布问题,许多学者进行过研究,如设 $A=\{a\mid 1\leqslant a<p$ 且 a 是模 p 的原根$\}$,实数 $0<\delta\leqslant 1$,文献[3]有分布性质

$$\sum_{\substack{a,\bar{a}\in A\\ |a-\bar{a}|\leqslant \delta p,\ 2\nmid a+\bar{a}}}|a-\bar{a}|^{k}=\frac{\delta^{k+1}}{k+1}p^{k}\varphi(p-1)+O\left(p^{k+\frac{1}{2}}4^{w(p-1)}d^{2}(p)\ln^{2}p\right),$$

其中 $a\bar{a}\equiv 1\pmod{p}$,k为非负整数.但对 k为非负实数的情形,从未见到过任何结果,本文就是将 k 推广到非负实数,来讨论分布性质.

$$L(p,k,\delta)=\sum_{\substack{a\in A}}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant \delta p,\ 2\nmid a+b}}|a-b|^{k}$$

得到如下分布的渐近公式.

定理 1 设素数 $p\geqslant 3$,对任意的实数 $0<\delta\leqslant 1$,当实数 $k\geqslant 0$时有渐近公式

$$L(p,k,\delta)=p^{k}\varphi(p-1)\left(\frac{\delta^{k+1}}{k+1}-\frac{\delta^{k+2}}{k+2}\right)+O\left(p^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

其中 $\varphi(x)$为 Euler函数,ε为任意固定的正数.

特别当 $k=0$或 $\delta=1$时可得如下推论.

推论 1 设 $p\geqslant 3$为素数,对任意的实数 $0<\delta\leqslant 1$有渐近公式

$$\sum_{\substack{a\in A}}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant \delta p,\ 2\nmid a+b}}1=\frac{1}{2}\delta(2-\delta)\varphi(p-1)+O\left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

推论 2 设 $p\geqslant 3$为素数,对任意的正实数 k有渐近公式

$$\sum_{\substack{a\in A}}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ 2\nmid a+b}}|a-b|^{k}=\frac{\varphi(p-1)}{(k+1)(k+2)}p^{k}+O\left(p^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

2002-05-08收稿.
* 陕西省教委专项科研基金资助项目 (00JK123).

2 引理

为了给出定理的证明,我们首先引入如下引理.

引理 1[5] 设素数 $p\geqslant 3$,对任意的整数 r,s 及 m,当 $m\nmid r$,$m\nmid s$ 时有

$$\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}} e\left(\frac{ra+sb}{m}\right)=\frac{\phi(p-1)}{p^2}e\left(\frac{(r+s)(p+1)}{2m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi pr}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi ps}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi r}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi s}{m}\right)}+O(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

其中 $e(y)=e^{2\pi iy}$.

引理 2[5] 设 $n\geqslant 3$ 是正整数,实数 $0<\theta\leqslant 1$,对任意的非负实数 k 有

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ a=b+m}}^{[n\theta]} m^k=n^{k+2}\left(\frac{\theta^{k+1}}{k+1}-\frac{\theta^{k+2}}{k+2}\right)+O(n^{k+1}).$$

引理 3 设整数 $n\geqslant 3$,实数 $0<\theta\leqslant 1$,对任意的实数 $k\geqslant 0$ 有估计式

$$\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ a=b+m}}^{[n\theta]}(-1)^m m^k\ll n^{k+1}.$$

证明 $\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ a=b+m}}^{[n\theta]}(-1)^m m^k=\sum_{m=1}^{[n\theta]}(-1)^m m^k\sum_{b=1}^{n-m}1$

$=\sum_{m=1}^{[n\theta]}(-1)^m m^k(n-m)=n\sum_{m=1}^{[n\theta]}(-1)^m m^k-\sum_{m=1}^{[n\theta]}(-1)^m m^{k+1}\ll nn^k+n^{k+1}\ll n^{k+1}$.

引理 4 设整数 $n\geqslant 3$,对任意的非负整数 r,当 $0<\theta\leqslant 1$,$k\geqslant 0$ 时有三角和估计式

$$\sum_{m=1}^{[\theta n]} m^k e\left(\frac{rm}{n}\right)\ll\frac{n^k}{\left|\sin\frac{\pi r}{n}\right|},\quad(n\nmid r).$$

$$\sum_{m=1}^{[\theta n]}(-1)^m m^k e\left(\frac{rm}{n}\right)\ll\frac{n^k}{\left|\cos\frac{\pi r}{n}\right|},\quad(n\nmid r).$$

证明 我们只证第一式,第二式类似可证.因为 $n\nmid r$,则

$\sum_{m=1}^{[\theta n]} m^k e\left(\frac{rm}{n}\right)\left(1-e\left(\frac{r}{n}\right)\right)=\sum_{m=1}^{[n\theta]} m^k e\left(\frac{rm}{n}\right)-\sum_{m=1}^{[n\theta]} m^k e\left(\frac{r(m+1)}{n}\right)=\sum_{m=1}^{[\theta n]}(m^k-(m-1)^k)e\left(\frac{rm}{n}\right)+O(n^k)\ll\sum_{m=1}^{[\theta n]}(m^k-(m-1)^k)+O(n^k)\ll n^k$.

于是得 $n\nmid r$ 时 $\sum_{m=1}^{[\theta n]} m^k e\left(\frac{rm}{n}\right)\ll\frac{n^k}{\left|\sin\frac{\pi r}{n}\right|}$.

3 定理的证明

有了上面的引理,我们就很容易给出定理的证明.

证明 $L(p,k,\theta)=\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant\theta p,\,2\nmid a+b}}|a-b|^k=$

$\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant\theta p}}\frac{1}{2}[1-(-1)^{a+b}]|a-b|^k=\frac{1}{2}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant\theta p}}|a-b|^k$

$-\frac{1}{2}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant\theta p}}(-1)^{a+b}|a-b|^k\triangleq L_1+L_2$,

注意到三角恒等式 $\sum_{a=1}^{n}e\left(\frac{am}{n}\right)=\begin{cases}n,n\mid m;\\0,n\nmid m.\end{cases}$

得主项

$L_1=\frac{1}{2}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ |a-b|\leqslant\theta p}}|a-b|^k=\sum_{w=1}^{[\theta p]}\sum_{\substack{a\in A\\ ab\equiv 1(p)\\ a=b+w}}\sum_{b\in A}w^k=\sum_{w=1}^{[\theta p]}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}$

$w^k\frac{1}{2p}\sum_{u=1}^{2p}e\left(\frac{u(a-b-w)}{2p}\right)=\frac{1}{2p}\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}1+$

$\frac{1}{2p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left(\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right)\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}e\left(\frac{u(a-b)}{2p}\right)$,

利用引理 1,并令 $m=2p,r=u,s=-u$ 得

$L_1=\frac{\phi(p-1)}{2p}\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k+\frac{1}{2p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left(\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right)\cdot$

$\left(\frac{\phi(p-1)}{p^2}\left|\sum_{c=1}^{p}e\left(\frac{uc}{2p}\right)\right|^2+O(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon})\right)=$

$\frac{\phi(p-1)}{2p^3}\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k\sum_{a=1}^{p}\sum_{b=1}^{p}\sum_{u=1}^{2p}e\left(\frac{u(a-b-w)}{2p}\right)+$

$O\left(p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right)=$

$\frac{\phi(p-1)}{p^2}\sum_{a=1}^{p}\sum_{b=1}^{p}\sum_{\substack{w=1\\ a=b+w}}^{[\theta p]}w^k+$

$O\left(p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[\theta p]}w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right)$,

由引理 2,引理 4得

$L_1=\phi(p-1)p^k\left(\frac{\theta^{k+1}}{k+1}-\frac{\theta^{k+2}}{k+2}\right)+O(p^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon})$

同样利用三角和恒等式与引理 1得

$L_2=-\sum_{w=1}^{[\theta p]}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}(-1)^w w^k\frac{1}{2p}\sum_{u=1}^{2p}e\left(\frac{u(a-b-w)}{2p}\right)=$

$-\frac{1}{2p}\sum_{w=1}^{[\theta p]}(-1)^w w^k\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}1-$

$\frac{1}{2p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left(\sum_{w=1}^{[\theta p]}(-1)^w w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right)\sum_{a\in A}\sum_{\substack{b\in A\\ ab\equiv 1(p)}}e\left(\frac{u(a-b)}{2p}\right)=$

$-\frac{\phi(p-1)}{2p}\sum_{w=1}^{[\theta p]}(-1)^w w^k-\frac{\phi(p-1)}{2p^3}\cdot$

$\sum_{u=1}^{2p-1}\left(\sum_{w=1}^{[\theta p]}(-1)^w w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right)\left|\sum_{c=1}^{p}e\left(\frac{uc}{2p}\right)\right|^2+$

$$O\left(\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^w w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right)=$$

$$-\frac{h(p-1)}{p^2}\sum_{\substack{a=1\\ a=b+w}}^{p}\sum_{b=1}^{p}\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^w w^k+$$

$$O\left(\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^w w^k e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right),$$

由引理 3 引理 4可得

$$L_2 \ll \frac{h(p-1)}{p^2}p^{k+1}+\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\frac{p^k}{\left|\cos\frac{\pi u}{2p}\right|}\ll$$

$p^{k+\frac{1}{2}+X}$,

于是可得

$$L(p,k,W)=h(p-1)p^k\left(\frac{W^{k+1}}{k+1}-\frac{W^{k+2}}{k+2}\right)+$$

$O(p^{k+\frac{1}{2}+X})$.

参考文献

1 Richard K G. Unsloved Problems in Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1981. 139~140.

2 张文鹏.关于 Lehmer DH问题及其推广.西北大学学报, 1993,(2): 103~108.

3 高 丽,赵 贞. Lehmer DH数与它的逆之差的分布性质.吉首大学学报, 2001, 22(1): 56~58.

4 Malyshev A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimates (in Russian). Vestnik Leningrad Univ, 1960, 15(3): 59~75.

5 Zhang Wenpeng. On the distribution of primitive roots modulo p. Publ Math Debrecen, 1998, 53(3, 4): 245~255.

6 Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 255页 Continue from page 255)

过程 $(\bar{p}_{ij}(t); i,j\in E, t\geqslant 0)$ 是唯一且强遍历的, 因此方程

$$\sum_{j\in E}\bar{q}_{ij}y_j+1\leqslant 0, \sum_{j\neq 0}\bar{q}_{0j}y_j<\infty.$$

即方程

$$\lambda_i(y_{i+1}-y_i)+\_{}_i(y_{i-1}-y_i)+1\leqslant 0, i\geqslant 1. \quad (12)$$

有非负一致有界解 $\{y_i, i\geqslant 0\}$.

又因为 $\sum_{j\in E}q_{ij}y_j+1=\_{}_i(y_{i-1}-y_i)+\lambda_i(y_{i+1}-y_i)-d_iy_i+1\leqslant \_{}_i(y_{i-1}-y_i)+\lambda_i(y_{i+1}-y_i)+1$;

故 $\{y_i, i\geqslant 0\}$ 也是 $\sum_{j\in E}q_{ij}y_j+1\leqslant 0$ 的非负一致有界解, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_jy_j\leqslant \sup_i y_i\sum_{j=1}^{\infty}c_j<\infty.$$

故 $\{y_i; i\geqslant 0\}$ 为 (5) 的非负一致有界解, 因而 Q-过程强遍历.

参考文献

1 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. Trans Ann Math Soc, 1940, 48: 488~515.

2 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann Math, 1957, 65(3): 527~570.

3 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on L. Acta Math, 1957, 97: 1~46.

4 侯振挺,邹捷中,张汉君等.马尔可夫过程的 Q-矩阵问题.长沙: 湖南科学技术出版社, 1994.

5 吴群英.广义非保守生-灭 Q过程.广西科学, 2002, 9(1): 6~8.

6 吴群英.具有突变率的广义生-灭过程的唯一性.广西科学, 2002, 9(3): 171~173.

7 Anderson W J. Continuous-time markov chains. Springer, Series in Statistics. Springer-Verlag. New York. 1991.

8 Tweedie R L. Criteria for ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity of Markov processes. J Appl Prob, 1981, (18): 122~130.

9 Zhang H J, Chen A Y, Lin X, et al.. The strong ergodicity of monotone transition function. Statistics and Probability Lettes, 2001, 55: 63~69.

(责任编辑: 黎贞崇)