DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.04.007
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (4): 262~ 264

时滞阶段结构捕食系统概周期正解的存在唯一性

Existence and Uniqueness of the Almost Periodic Solution of a Prey-predator Stage-structure Model with Time-delay

刘丙辰* 罗桂烈 李锋杰*
Liu Bingchen Luo Guilie Li Fengjie

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路 3号 541004)
(College of Math. and Comp. Sci. Guangxi Normal University, 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 讨论一类具有基于比率型 HollingIII型功能性反应且含时滞的阶段结构的捕食被捕食模型。通过利用比较原理,得到了系统一致持久性;通过构造 Razumikhin函数,得到了系统存在唯一且一致渐近稳定的正概周期解的条件。

关键词 捕食系统 时滞阶段结构捕食系统 概周期解
中图法分类号 O175

Abstract A nonautonomous stage-structured prey-predator model with time-delays and ratio-dependent Holling III functional response is discussed. By the comparison theorem, the system in this paper is uniformly persistent. The conditions of the existence and uniqueness of the positive almost periodic solution which is uniformly asymptotically stable are obtained by the Razumikhin function method.

Key words prey-predator system, prey-predator stage-structure model with time-delay, almost periodic solution

在种群动力学的研究中,种群的持久性问题一直是一个有趣并且重要的问题.为使模型更加准确和实用,越来越多的现实因素被考虑到模型中来.考虑阶段结构的文章[1~4]都得到了好的结果.在文献[5]中,提出了一个捕食者通过捕食而增加体质的阶段结构捕食如下模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \mathrm{T}x_m(t) - \mathrm{V}x_i(t) - \mathrm{T}e^{-\mathrm{Vf}}x_m(t-\mathrm{f}), \\ \dot{x}_m(t) = \mathrm{T}e^{-\mathrm{Vf}}x_m(t-\mathrm{f}) - \mathrm{U}x_m^2(t) + k\theta x_m(t)y(t), \\ \dot{y}(t) = y(t)[\mathrm{V} - \theta x_m(t) - by(t)]. \end{cases} \tag{*}$$

但是对于周期和概周期情况下,具有“基于比率”的 HollingIII 功能性反应函数的模型很少被人们讨论.本文拟讨论模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathrm{T}(t)x_2(t) - \mathrm{V}(t)x_1(t) - \mathrm{T}(t-\mathrm{f})\cdot \\ \qquad e^{-\int_{t-\mathrm{f}}^{t}\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s}x_2(t-\mathrm{f}) \triangleq f_{1x}, \\ \dot{x}_2(t) = \mathrm{T}(t-\mathrm{f})e^{-\int_{t-\mathrm{f}}^{t}\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s}x_2(t-\mathrm{f}) - \mathrm{U}(t)\cdot \\ \qquad x_2^2(t) + k(t)e(t)x_2(t)x_3^2(t)/(h(t)x_2^2(t) + \\ \qquad g(t)x_3^2(t)) \triangleq f_{2x}, \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t)[b(t) - d(t)x_3(t) - e(t)\cdot \\ \qquad x_2(t)x_3(t)/(h(t)x_2^2(t) + g(t)x_3^2(t))] \\ \qquad \triangleq f_{3x} \\ x_i(\theta) = \mathrm{Q}_i(\theta), i = 1, 2, 3. \theta \in [-\mathrm{f}, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1(t), x_2(t)$ 分别表示捕食者的幼年和成年种群在时刻 t 的数量;$x_3(t)$ 表示食饵种群在时刻 t 的数量;$k(t)$ 是转化系数;$e(t), h(t), g(t)$ 表示 HollingIII类功能性反应函数中的系数;f是与捕食者种群成熟期有关的正常数;$\mathrm{T}(t-\mathrm{f})x_2(t-\mathrm{f})\exp\{-\int_{t-\mathrm{f}}^{t}\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s\}$ 表示幼年种群 x_1 从时刻 $t-\mathrm{f}$ 到时刻 t 转化为成年种群的比率;假设 $\mathrm{T}(t), \mathrm{V}(t), e(t), k(t), h(t), b(t), d(t)$,

2002-03-12收稿。
* 现为大连理工大学博士生

$U(t)$ 是严格正的且有正下界的连续有界函数. 本文自始至终采用下列记号: 设 $k(t)$ 是一个连续的存在正下界的有界函数, 记 $\bar{k} = \sup_{t\in R}\{k(t)\}$, $\underline{k} = \inf_{t\in R}\{k(t)\}$. 简记 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $f_x = (f_{1x}, f_{2x}, f_{3x})$, $R_+^3 \triangleq \{x\in R^3 | x_i \geqslant 0, i = 1,2,3\}$, 并有

$0 < \min\{\underline{T}, \underline{V}, \underline{U}, \underline{e}, \underline{k}, \underline{U}, \underline{h}, \underline{g}, \underline{b}, \underline{d}\} \leqslant \max\{\bar{T}, \bar{V}, \bar{U}, \bar{e}, \bar{k}, \bar{U}, \bar{h}, \bar{g}, \bar{b}, \bar{d}\} < +\infty$.

如果 $x\in \mathrm{Int}R_+^3$, 则表示 $x > 0$. 出于生物意义的考虑, 仅考虑 (1) 在 $\mathrm{Int}R_+^3$ 中的性质. 设 $C^+ \triangleq C([-f, 0], R_+^3)$ 是由具有范数 $\| O \| = \sup_{\theta\in[-f,0]} | O(\theta) |$, $O \in C^+$, $(| O(\theta) | = \sum_{i=1}^{3} | O_i(\theta) |)$ 的非负连续有界函数组成的 Banach 空间. 定义 (1) 的初始条件如下

$$x(t) = O \in C^+, t\in [-f, 0], O(0) > 0. \qquad (2)$$

考虑到初值的连续性, 假设

$$x_1(0) = \int_{-f}^{0} T(s) x_2(s) e^{\int_0^s V(\theta) d\theta} ds.$$

1 一致持久

引理 1 若 (1) 满足初始条件 (2), 则 $\mathrm{Int}R_+^3$ 是 (1) 的正向不变集.

证明 证明方法类似文献 [6] 中的定理 1 的证明.

仿照文献 [6] 中定理 2 的证明, 可得引理 2 和引理 3.

引理 2 考虑方程 $\dot{x}(t) = B_1 x(t-f) + B_2 x(t) - B_3 x^2(t)$, 其中 $B_i, (i = 1,2,3)$ 为正常数. 初始条件为 $x(t) = O(t) > 0, t\in [-f, 0]$, 则 $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{B_1 + B_2}{B_3}$.

引理 3 考虑下列不等式

$$\dot{x}(t) \geqslant B_1 x(t-f) + B_2 x(t) - B_3 x^2(t). (t\geqslant 0, x(0) > 0).$$

对任意的 $X > 0$, 存在一个 $T > 0$, 当 $t \geqslant T$ 时, 有 $x(t) \geqslant \dfrac{B_1 + B_2}{B_3} - X$, 或者

$$\dot{x}(t) \leqslant B_1 x(t-f) + B_2 x(t) - B_3 x^2(t). (t\geqslant 0, x(0) > 0).$$

对任意的 $X > 0$, 存在一个 $T' > 0$, 当 $t \geqslant T'$ 时, 有 $x(t) \leqslant \dfrac{B_1 + B_2}{B_3} + X$.

定理 1 假设 (1) 满足 (2) 和

$$2\underline{b}\,\overline{\underline{h}\,\underline{g}} > \bar{e}, \qquad (3)$$

则系统 (1) 是一致持久的.

证明 根据引理 1, $\mathrm{Int}R_+^3$ 是 (1) 的正不变集. 由 (1) 的第二式可得,

$$\dot{x}_2(t) \leqslant \bar{T} \cdot \exp\{-\underline{V}f\} x_2(t-f) - \underline{U} x_2^2(t) + \frac{\overline{ke}}{\underline{g}} x_2(t),$$

据引理 2 和引理 3, 从而存在 T_1, 当 $t > T_1 + f$ 时, 得

$$x_2(t) \leqslant M_2 \triangleq \left(\frac{\bar{T}\exp\{-\underline{V}f\} + \frac{\overline{ke}}{\underline{g}}}{\underline{U}}\right) + X, $$

(其中 $x_2(0) \leqslant M_2$, X 是充分小的正常数), 类似可得, $\dot{x}_2(t) \geqslant \underline{T} x_2(t-f)\exp\{-\bar{V}f\} - \bar{U} x_2^2(t)$, 从而存在一个 $T_2 (> T_1)$, 当 $t > T_2 + f$ 时, $x_2(t) \geqslant m_2 \triangleq \dfrac{\underline{T}\exp\{-\bar{V}f\}}{2\bar{U}} - X > 0$,

根据微分不等式原理, 由 (1) 的第一式, 得

$$\dot{x}_1(t) \leqslant \bar{T} M_2 - \underline{T} m_2 \exp\{-\bar{V}f\} - \bar{V} x_1(t),$$

从而, 存在 $T_3 (> T_2)$, 当 $t \geqslant T_3$ 时, 使得 $x_1 \leqslant M_1 \triangleq \dfrac{\bar{T}M_2 - \underline{T}m_2\exp\{-\bar{V}f\}}{\bar{V}} + X$, (其中 $x_1(0) \geqslant M_1$). 再由 (1) 的第一式可得

$$e^{\int_0^t V(s)ds} \cdot \dot{x}_1(t) = [T(t)x_2(t) - T(t-f)x_2(t-f)e^{-\int_{t-f}^t V(s)ds}]e^{\int_0^t V(s)ds} - V(t)x_1(t)e^{\int_0^t V(s)ds},$$

则 $\dfrac{d}{dt}[x_1(t)e^{\int_0^t V(s)ds}] = \dfrac{d}{dt}[\int_{t-f}^{t} T(s)x_2(s)e^{\int_0^s V(s)ds}]$. 从 0 到 t 积分得,

$$x_1(t) = e^{-\int_0^t V(s)ds}[x_1(0) - \int_{-f}^{0} T(s)x_2(s)e^{\int_0^s V(\theta)d\theta}ds] + e^{-\int_0^t V(s)ds}\int_0^f T(t-u)x_2(t-u)e^{\int_0^{t-u}V(\theta)d\theta}du =$$

$$e^{-\int_0^t V(s)ds}[x_1(0) - \int_{-f}^{0} T(s)x_2(s)e^{\int_0^s V(\theta)d\theta}ds] + \int_0^f T(t-u)x_2(t-u)e^{\int_t^{t-u}V(\theta)d\theta}du \geqslant \int_0^f \underline{T}m_2 e^{-\bar{V}u}du = \underline{T}m_2(1 - e^{-\bar{V}f})\bar{V}^{-1} \triangleq m_1.$$

从而, $x_1(t) \geqslant m_1, (t > f$, 且 $x_1(0) \geqslant m_1)$. 据 (1) 的第三式得 $\dot{x}_3(t) \leqslant x_3(t)[\bar{b} - \underline{d}x_3(t)]$, 则, 存在 $T_4 (> T_3)$, 当 $t \geqslant T_4 + f$ 且 $x_3(0) \leqslant M_3 \triangleq \dfrac{\bar{b}}{\underline{d}} + X$ 时, $x_3(t) \leqslant M_3$.

再由 (1) 的第三式,

$$\dot{x}_3(t) \geqslant x_3(t)[\underline{b} - \bar{d}x_3(t) - \bar{e}x_2(t)x_3(t)/2\overline{\underline{g}\,\underline{h}}x_2(t)x_3(t)] = x_3(t)[\underline{b} - \bar{d}x_3(t) - \bar{e}/2\overline{\underline{g}\,\underline{h}}].$$

据条件 (3), 可得存在 $T_5 (> T_4)$, 当 $t \geqslant T_5 + f$ 且 $x_3(0) \geqslant m_3 \triangleq \dfrac{1}{2\bar{d}}(\underline{b} - \bar{e}/2\overline{\underline{g}\,\underline{h}})$, 可得 $x_3 \geqslant m_3$.

综上所证, 当 $t > T_5 + f$ 时, 有 $0 < m_i \leqslant x_i(t) \leqslant M_i < +\infty, i = 1,2,3$ 成立. 因此, 定义集合 $S \triangleq \{x\in \mathrm{Int}R_+^3 | 0 < m_i \leqslant x_i \leqslant M_i < +\infty, i = 1,2,3\}$. 即 S 是系统 (1) 的正的最终有界不变集, 则系统 (1) 是一致持久的. 定理 1 得证.

注 根据上面的讨论, 可以选取 S 为 (1) 的初始空间. 则 S 是系统 (1) 的不变集, 且满足此初始空间的

解是唯一且有界的，从而可以选取 $T_5 + f = 0$. 从而在讨论 (1) 满足 (2) 的解的性质时，可以相应讨论在集合 S 中的性质. 比如讨论 (1) 的解的全局吸引性.

2 概周期解

方程 (1) 的乘积方程是

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \mathrm{T}(t)y_2(t) - \mathrm{V}(t)y_1(t) - \mathrm{T}(t)\cdot \\ \quad e^{-\int_{t-f}^{t}\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s} y_2(t-f) \triangleq f_{1y}, \\ \dot{y}_2(t) = \mathrm{T}(t)e^{-\int_{t-f}^{t}\mathrm{V}(s)\mathrm{d}s} y_2(t-f) - \mathrm{U}(t)y_2^2(t) + \\ \quad k(t)e(t)y_2(t)y_3^2(t)/(h(t)y_2^2(t) + g(t)\cdot \\ \quad y_3^2(t)) \triangleq f_{2y}, \\ \dot{y}_3(t) = y_3(t)(b(t) - d(t)y_3(t) - e(t)y_2(t)\cdot \\ \quad y_3(t)/(h(t)y_2^2(t) + g(t)x_3^2(t))) \triangleq f_{3y} \\ y_i(\theta) = \mathrm{j}_i(\theta), i = 1,2,3. \theta \in [-f, 0]. \end{cases} \quad (4)$$

仿照前面定义 $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), f_y = (f_{1y}, f_{2y}, f_{3y})$. 并记 (1) 的相伴系统为

$$\dot{x} = f_x, \dot{y} = f_y. \quad (5)$$

定理 2 假设 (1) 满足条件 (2) 和 (3)，且满足下列条件

$$-\underline{d} + 2\bar{e}\bar{h}M_2^3M_3/(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2 + \bar{e}m_2(\bar{g}M_3^2 - \underline{h}m_2^2)/(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2 < 0, \quad (6)$$

$$\mathrm{T} - 2\underline{\mathrm{U}}m_2 - \underline{h}m_2^2m_3^2\underline{e}/(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2 + \bar{e}\bar{h}M_2^2M_3^4/(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2 + \bar{e}M_3(\bar{h}M_2^2 - \underline{g}m_3^2)/(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2 < 0, \quad (7)$$

则 (1) 存在唯一正的概周期解 $p(t)$ 且是一致渐近稳定的. 当系统 (1) 是 t 的 k-周期系统时，相应结论仍成立.

证明 根据以上的讨论，仅讨论当 $t \geqslant 0, x \in S$ 时的性质. 定义 Razumikhin 函数为

$$V(t) \triangleq V(t, x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{2} |x_i(t) - y_i(t)| + |\ln x_3(t) - \ln y_3(t)|,$$

且 V 满足文献 [7] 中定理 1 的条件. 容易验证 V 满足文献 [7] 中定理 1 的条件 (I) 和 (II). 下面验证条件 (III). 根据微分中值定理，可得 $\sum_{i=1}^{3}|x_i(t) - y_i(t)| \leqslant V(t, x(t), y(t)) \leqslant L\sum_{i=1}^{3}|x_i(t) - y_i(t)|$. 其中，$l \triangleq \min\{1, \frac{1}{M_3}\}, L \triangleq \max\{1, \frac{1}{m_3}\}$. 选取 $P(s) = \frac{L}{l}s > s > 0, a(s) = ls > 0, b(s) = Ls > 0, (s > 0)$. $b(0) = a(0) = 0$, 当 $V(t+\theta, x(t+\theta), y(t+\theta)) \leqslant P(V(t, x(t), y(t)))$, $(\theta \in [-f, 0])$ 时,

$$D^+V(t)|_{(5)} = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{sign}(x_i(t) - y_i(t))(\dot{x}_i(t) - \dot{y}_i(t)) + \mathrm{sign}(x_3(t) - y_3(t))(\frac{\dot{x}_3(t)}{x_3(t)} - \frac{\dot{y}_3(t)}{y_3(t)}) \leqslant -\underline{\mathrm{V}}|x_1(t) - y_1(t)| + \{\bar{\mathrm{T}}e^{-\underline{\mathrm{V}}f} - \underline{\mathrm{T}}e^{-\bar{\mathrm{V}}f}\}|x_2(t-f) - y_2(t-f)| + \{\mathrm{T} - 2\underline{\mathrm{U}}m_2 - \frac{\underline{h}m_2^2m_3^2\underline{e}}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2} + \frac{\bar{e}\bar{h}M_2^2M_3^4}{(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2} + \frac{\bar{e}M_3(\bar{h}M_2^2 - \underline{g}m_3^2)}{(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2}\}|x_2(t) - y_2(t)| + \{-\underline{d} + \frac{2\bar{e}\bar{h}M_2^3M_3}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2} + \frac{\bar{e}m_2(\bar{g}M_3^2 - \underline{h}m_2^2)}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2}\}|x_3(t) - y_3(t)| \leqslant -CV(t).$$

其中 $M_i, m_i, (i = 1,2,3)$ 见定理 1. 由条件 (6) 和 (7) 得

$$-C \triangleq \max\{-\underline{\mathrm{V}}, \mathrm{T} - 2\underline{\mathrm{U}}m_2 - \frac{\underline{h}m_2^2m_3^2\underline{e}}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2} + \frac{\bar{e}\bar{h}M_2^2M_3^4}{(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2} + \frac{\bar{e}M_3(\bar{h}M_2^2 - \underline{g}m_3^2)}{(\underline{h}m_2^2 + \underline{g}m_3^2)^2}, m_3[-\underline{d} + \frac{2\bar{e}\bar{h}M_2^3M_3}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2} + \frac{\bar{e}m_2(\bar{g}M_3^2 - \underline{h}m_2^2)}{(\bar{h}M_2^2 + \bar{g}M_3^2)^2}]\} + \frac{L}{l}\max\{1, \bar{\mathrm{T}}e^{-\underline{\mathrm{V}}f} - \underline{\mathrm{T}}e^{-\bar{\mathrm{V}}f}\} < 0.$$

根据文献 [8] 中定理 1.3，对于任意的初始条件 (2)，系统 (1) 存在唯一解，且由前面的证明，此解当 t 充分大时有界. 从而根据文献 [7] 的定理 1，(1) 存在唯一正的概周期解 $x(t)$，且 $\mathrm{mod}(x) \subset \mathrm{mod}(f)$. 从而对周期系统也成立. 证毕.

参考文献

1 Aiello W G, Freedman H I, Wu J. Analysis of a model representing stage-structured population growth with stage-dependent time delay. SIAM J Appl Math, 1992, 52: 855~869.

2 Wang Wendi, Chen Lansun. A predator-prey system with stage-structured for predator. Computers Math Applic, 1997, 33: 83~91.

3 Magnusson K G. A stage-structured predator-prey system with cannibalism and competition. World Scientific, 1997, 13: 195~200.

4 Liu Shengqing, Luo Guilie, Jiang Youlin. A nonautonomous stage-structured single species model with diffusion. Ann of Diff Eqs, 2000, 16: 153~168.

5 陈兰荪，王东达，杨启昌. 阶段结构种群动力学模型. 北华大学学报 (自然版)，2000，1(3): 185~197.

6 Aiello W G, Freedman H I. A time-delay model of single-species growth with stage structure. Math Biosci, 1990, 101: 139~153.

7 Yuan Rong. Existence of almost periodic solution of functional differential equations. Ann of Diff Eqs, 1991, 7(2): 234~242.

8 徐远通. 泛函微分方程与测度微分方程. 广州: 中山大学出版社, 1988.

(责任编辑: 黎贞崇)