DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2003.01.003

广西科学 Guangxi Sciences 2003，10（1）：8～10，17

t-竞赛矩阵的谱*

Eigenvalues of t-Tournament Matrices

张德龙　　谭尚旺**

Zhang Delong　Tan Shangwang

（广西工学院信息与计算机科学系　柳州市东环路　545006）

(Dept. of Info. and Comp. Sci. ,Guangxi Univ. of Tech. ,Donghuanlu,Liuzhou,Guangxi,545006,China)

摘要　讨论 t-竞赛矩阵的特征值问题，推广竞赛矩阵的相应结论.

关键词　t-竞赛矩阵　特征值　圈

中图法分类号　O157.5;O241.6

Abstract　The eigenvalues of t- tournament matrices is studied. The correspond condusion on tournament matrices is generalised.

Key words　t-tournament matrices, eigenvalues, cycle

竞赛图和竞赛矩阵的谱已有广泛的研究[1~6]. t 重完全图的定向图称为 t-竞赛图，其邻接矩阵称为 t-竞赛矩阵. 即非负整数矩阵 A 称为竞赛 t-矩阵，如果 $A+A^T=t(J-I)$，其中 J,I 分别是 n 阶全1矩阵和单位矩阵，A^T 是 A 的转置. 本文讨论了 t-竞赛矩阵的特征值问题，推广了竞赛矩阵相应的结论.

设 A 是一个 n 阶 t-竞赛矩阵，A 的行和向量 $S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)^T$ 称为 A 的得分向量. 如果 A 的得分向量的每个分量都相等，则称 A 是正则的，即 $S=(\frac{t}{2}(n-1),\frac{t}{2}(n-1),\cdots,\frac{t}{2}(n-1))^T$，其中当 t 为奇数时，n 为奇数. 如果 A 所对应的 t-竞赛图是强连通的，则称 A 是不可约的.

定理 1　设 A 是 n 阶 t-竞赛矩阵，z 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量，e 是全1向量，则

(1) $\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\frac{t}{2}$，等式成立当且仅当 z 与 e 正交；

(2) $\mathrm{Re}\lambda\leqslant\frac{t}{2}(n-1)$，等式成立当且仅当 $\lambda=\frac{t}{2}(n-1)$，当且仅当 A 是正则 t-竞赛矩阵；

(3) 若 $\mathrm{Re}\lambda\neq-\frac{t}{2}$，则 λ 的几何重数为1；

(4) 若 $\mathrm{Re}\lambda=-\frac{t}{2}$，则 λ 的几何重数与代数重数一致.

证明　因 $A+A^T=t(J-I)$，设 $Az=\lambda z, z\neq0$. 则 $z^*Az+z^*A^Tz=t(z^*Jz-z^*z)$.

因为 $J=ee^T$，$z^*Az=\lambda z^*z$，$z^*A^Tz=(z^*Az)^*=\bar{\lambda}z^*z$，则

$(2\mathrm{Re}\lambda+t)z^*z=t(e^Tz)^*(e^Tz)=t|e^Tz|^2$.

(1) 由于 $z^*z>0$，$|e^Tz|\geqslant0$，因此，$\mathrm{Re}\lambda\geqslant-\frac{t}{2}$ 并且等式成立当且仅当 z 与 e 正交.

(2) 由 Cauchy-Schwartz 不等式有 $|e^Tz|^2\leqslant|z^*z||e^*e|=n|z^*z|$，因此 $\mathrm{Re}\lambda\leqslant\frac{t}{2}(n-1)$，等式成立当且仅当 $|e^Tz|^2=|z^*z||e^*e|$，即当且仅当 z 与 e 线性相关，也即 e 是 A 的特征向量，$Ae=\lambda e$，所以 A 是正则的并且 $\lambda=\frac{t}{2}(n-1)$.

(3) 如果 $\mathrm{Re}\lambda\neq-\frac{t}{2}$，$x$ 与 y 是对应于 λ 的特征向量，令 $z=(e^Tx)y-(e^Ty)x$，则 $z^*e=(x^*e)(y^*e)-(y^*e)(x^*e)=0$，由(1)有 $z=0$ 或 $\mathrm{Re}\lambda=-\frac{t}{2}$，因为 $\mathrm{Re}\lambda\neq-\frac{t}{2}$，所以 $z=0$，故 x 与 y 线性相关.

(4) 如果 $\mathrm{Re}\lambda=-\frac{t}{2}$，若 λ 的几何重数小于代数重数，则存在非零向量 v 和 w 使得

$Aw=\lambda w, Av=\lambda v+w, w^*v=0$，

因 $A+A^T=t(J-I)$，故

$w^*Av+w^*A^Tv=t(w^*Jv-w^*v)$，即

$\lambda w^*v+w^*w+\bar{\lambda}w^*v=t((w^*e)(e^Tv)-w^*v)$，

2002-06-27 收稿，2002-09-02 修回。

*广西自然科学基金课题(桂科自 0131001)。

**石油大学应用数学系　山东东营　257062 (Department of Applied Mathematics, University of Petroleum, Dongying, Shandong 257062, China)。

因为 $w^*v=0, w^*e=0$，所以 $w^*w=0, w=0$，矛盾，故(4)成立.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶 t-竞赛矩阵，b_j 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 j 的个数($j=0,1,\cdots,t$)，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是它的特征值，$\lambda_1>|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$，则

$$|\lambda_k|\leqslant\left[\frac{\frac{1}{2}t^2n(n-1)-\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j}{k}\right]^{\frac{1}{2}}, k=2,3,\cdots,n.$$

证明 由 Schur 定理，$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$，因 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T=t(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})$，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则有 $a_{ii}=0$ 及当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=t-a_{ji}$，因此，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$ $=\frac{1}{2}t^2n(n-1)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t-a_{ij})=\frac{1}{2}t^2n(n-1)-\sum_{j=0}^{t}j(t-j)b_j=\frac{1}{2}t^2n(n-1)-\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$，当 $k\geqslant2$ 时，$k|\lambda_k|^2\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\frac{1}{2}t^2n(n-1)-\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$，得证.

为了研究具有 2 个或 3 个特征值的 t-竞赛矩阵，我们要研究 t-竞赛图的圈. C_2 与 C_3 分别表示 t-竞赛图的 2 圈和 3 圈的数目，b_j 是相应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 j 的个数($j=0,1,\cdots,t$)，$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的得分向量.

引理 1 (1)$C_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$；

(2)$C_3+tC_2=\frac{t^3n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{2}ts^Ts$.

证明 (1)$C_2=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}a_{ik}(t-a_{ik})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t}j(t-j)b_j=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$.

(2)t-竞赛图的三角形数目为 $t^3\binom{n}{3}$，任意三角形或者是 3 圈或者存在一个顶点出度为 2，则有

$C_3=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i\\k\neq j}}^{n}a_{ij}a_{ik}=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{ij}a_{ik}=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{ik})=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(s_i-a_{ij})=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}s_i(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})+\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t-a_{ji})=t^3\binom{n}{3}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}s_i^2+\frac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-\frac{1}{2}t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}=t^3\binom{n}{3}+\frac{1}{4}t^3n(n-1)-\frac{1}{2}ts^Ts-\frac{1}{2}t\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$，

因此，$C_3+tC_2=\frac{t^3n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{2}ts^Ts$.

得证.

定理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶不可约 t-竞赛矩阵($n\geqslant3$)，b_j 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 j 的个数，($j=0,1,\cdots,t$)，$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的得分向量，若 $\boldsymbol{A}$ 恰有 2 个不同特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个不同特征值全为整数且

$$s^Ts=\frac{1}{6}t^2n(n-1)(2n-1)-\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j-\frac{2}{3t}n(n-1)(n-2)\left[\frac{\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j}{n(n-1)}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 的 2 个不同特征值为 $\lambda_1>0$(1 重)与 $\lambda_2<0$($n-1$ 重)，则，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+(n-1)\lambda_2=0$.

由引理 1 有 $C_2=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2)=\frac{1}{2}(\lambda_1^2+(n-1)\lambda_2^2)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$，因此，

$$\lambda_1=(n-1)\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j}{n(n-1)}},$$

$$\lambda_2=-\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j}{n(n-1)}}.$$ 又由引理 1 有

$C_3=\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^3)=\frac{1}{3}(\lambda_1^3+(n-1)\lambda_2^3)=t^3\binom{n}{3}+\frac{1}{4}t^3n(n-1)-\frac{1}{2}ts^Ts-\frac{1}{2}t\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j$.

得证.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正则 t-竞赛矩阵($n\geqslant3$)，若 $\boldsymbol{A}$ 恰有 2 个不同特征值，则当且仅当 t 是偶数且 $\boldsymbol{A}=\frac{t}{2}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})$.

证明 充分性显然，下面证明必要性. 设 A 的 2 个不同特征值为 $\lambda_1>0$(1 重)与 $\lambda_2<0$($n-1$ 重)，由定理 1，则有 $\lambda_1=\frac{t}{2}(n-1), \lambda_2=-\frac{t}{2}$.

当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=t-a_{ji}$，因此，对 $k=1,2,\cdots,\left[\frac{t}{2}\right]$，有 $b_k=b_{t-k}$，考虑 $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素，容易得到

$$b_1+b_2+\cdots+b_{t-1}+2b_t=n(n-1).$$

由定理 3 知 $\lambda_1=(n-1)\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{t-1}j(t-j)b_j}{n(n-1)}}$，因此有

$(t-1)b_1+2(t-2)b_2+\cdots+j(t-j)b_j+\cdots+(t-1)b_{t-1}=\frac{1}{4}t^2n(n-1)$.

若 t 为奇数，由于 $b_1=b_{t-1},b_2=b_{t-2},\cdots,b_{\frac{t-1}{2}}=b_{\frac{t+1}{2}}$ 因此有

$$\begin{cases}b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t-1}{2}}+b_t=\frac{n(n-1)}{2},\\(t-1)b_1+2(t-2)b_2+\cdots+j(t-j)b_j+\cdots\\+(\frac{t-1}{2})(\frac{t+1}{2})b_{\frac{t-1}{2}}=\frac{1}{8}t^2n(n-1).\end{cases}$$

显然，当 $j=1,2,\cdots,\frac{t-1}{2}$ 时，$j(t-j)\leqslant\frac{t^2-1}{4}$，因此

$\frac{t^2-1}{4}(b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t-1}{2}})\geqslant(t-1)b_1+2(t-2)b_2+\cdots+(\frac{t-1}{2})(\frac{t+1}{2})b_{\frac{t-1}{2}}=\frac{1}{8}t^2n(n-1)$，即 $(t^2-1)(b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t-1}{2}})\geqslant\frac{1}{2}t^2n(n-1)$，由 $b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t-1}{2}}+b_t=\frac{n(n-1)}{2}$，得 $b_t\leqslant-\frac{n(n-1)}{2}$，导出矛盾.

若 t 为偶数，由于 $b_1=b_{t-1},b_2=b_{t-2},\cdots,b_{\frac{t}{2}-1}=b_{\frac{t}{2}+1}$ 因此有

$$\begin{cases}b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t}{2}-1}+\frac{1}{2}b_{\frac{t}{2}}+b_t=\frac{n(n-1)}{2},\\(t-1)b_1+2(t-2)b_2+\cdots+j(t-j)b_j+\cdots\\+(\frac{t}{2}-1)(\frac{t}{2}+1)b_{\frac{t}{2}-1}+\frac{t^2}{8}b_{\frac{t}{2}}=\frac{1}{8}t^2n(n-1).\end{cases}$$

显然，当 $j=1,2,\cdots,\frac{t}{2}-1$ 时，$j(t-j)\leqslant\frac{t^2}{4}-1$，因此

$\frac{1}{8}t^2n(n-1)\leqslant(\frac{t^2}{4}-1)(b_1+b_2+\cdots+b_{\frac{t}{2}-1})+\frac{t^2}{8}b_{\frac{t}{2}}=(\frac{t^2}{4}-1)(\frac{n(n-1)}{2}-b_t-\frac{1}{2}b_{\frac{t}{2}})+\frac{t^2}{8}b_{\frac{t}{2}}$，

则 $b_{\frac{t}{2}}\geqslant n(n-1)+2(\frac{t^2}{4}-1)b_t$，

因此，$b_{\frac{t}{2}}=n(n-1)$，即 $A=\frac{t}{2}(J-I)$.

问题 当 t 取何值时，存在恰好 2 个不同特征值的不可约 n 阶非正则 t-竞赛矩阵($n\geqslant3$)?

下面讨论 3 个不同特征值的 t-竞赛矩阵，由定理 1 知，n 阶 t-竞赛矩阵的最大特征值的最大值为 $\frac{t}{2}(n-1)$，最大特征值为 $\frac{t}{2}(n-1)$ 的 t-竞赛矩阵必是正则的. 当 A 是正则时，A 的特征值为 $\frac{t}{2}(n-1)$ 和其它 $n-1$ 个实部为 $-\frac{t}{2}$ 的特征值. $m_{i,k}$ 表示 A 中第 i 行元素 k 的个数，记

$$Q=((\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{1,k})e,(\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{2,k})e,\cdots,(\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{n,k})e).$$

定理 5 设 A 是 n 阶正则 t-竞赛矩阵($n\geqslant3$)，若 A 恰有 3 个不同特征值，则当且仅当 n 是奇数并且 $\frac{t^2}{4}n(n-1)-\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k\neq0$ 以及 $AA^T=(\frac{t^2}{4}(n-3)+\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})J+(\frac{t^2}{4}(n+1)-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})I-Q$.

证明 必要性 A 是正则 t-竞赛矩阵且恰有 3 个不同特征值，故 A 的特征值为 $\frac{t}{2}(n-1)$(1 重)，$-\frac{t}{2}\pm\beta i$($\frac{n-1}{2}$重)，由于 $\mathrm{Tr}(A^2)=(\frac{t}{2}(n-1))^2+\frac{n-1}{2}((-\frac{t}{2}+\beta i)^2+(-\frac{t}{2}-\beta i)^2)=\frac{t^2}{4}n(n-1)-(n-1)\beta^2$，则有 $\beta^2=\frac{t^2}{4}n-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1}$，因为 $\frac{n-1}{2}$ 为整数且 $\beta\neq0$，所以，n 是奇数并且 $\frac{t^2}{4}n(n-1)-\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k\neq0$.

由定理 1 知 A 可对角化，A 的极小多项为 $(x-\frac{t}{2}(n-1))(x^2+tx+\frac{t^2}{4}+\beta^2)$，故有 $(A-\frac{t}{2}(n-1)I)(A^2+tA+(\frac{t^2}{4}+\beta^2)I)=0$.

由定理 1 知，$A^2+tA+(\frac{t^2}{4}+\beta^2)I$ 的列向量为 $A-\frac{t}{2}(n-1)I$ 的零向量，即存在实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得 $A^2+tA+(\frac{t^2}{4}+\beta^2)I=(c_1e,c_2e,\cdots,c_ne)$，因为 $(A^2)_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t-a_{ij})=\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{i,k}$，因此，$c_i=\beta^2+\frac{t^2}{4}+\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{i,k}=\frac{t^2}{4}(n+1)+\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)m_{i,k}-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1}$.

因 A 正则，则 $AJ=\frac{t}{2}(n-1)J$，由 $A+A^T=t(J-I)$，得 $A^2+tA=-AA^T+\frac{t^2}{2}(n-1)J$，因此，$AA^T=\frac{t^2}{2}(n-1)J+(\beta^2+\frac{t^2}{4})I-(c_1e,c_2e,\cdots,c_ne)=(\frac{t^2}{4}(n-3)+\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})J+(\frac{t^2}{4}(n+1)-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})I-Q$. 必要性得证.

充分性 由必要性的证明过程容易得到多项式

(下转第 17 页 Continue on page 17)

注意到，当$a-b=0$即价格$P(t)=a$为常数时，$n^*=\sqrt{\frac{C_1C_2R}{2(C_1+C_2)K}}$即为允许缺货的EOQ公式中的最优订购次数，而$q^*=\sqrt{\frac{2C_1^2KR}{C_1C_2(C_1+C_2)}}$即为允许缺货的EOQ公式中的最优短缺量.

3 应用：允许缺货

例1 某厂需订购一批材料，存贮期限为$T=1$年. 已知：需求量$R=30\ 000$件/年，存储费$C_1=10$元/年·件，短缺损失费$C_2=15$元/年·件，订购费$K=1\ 000$元/次，材料的价格为$P(t)=20-(20-18)t=20-2t, 0\leqslant t\leqslant 1$，在此$a=20, b=18$. 求最优订购次数及最小库存费用.

解 $n^*=\sqrt{\frac{[C_1C_2+(C_1+C_2)(a-b)]R}{2(C_1+C_2)K}}\approx 10.95$，

∴ 最优订购次数$n^*=11$(次).

$$\because\quad q^*=\sqrt{\frac{2C_1^2KR}{(C_1+C_2)[C_1C_2+(C_1+C_2)(a-b)]}}\approx 1\ 095.44,$$

∴ 最优短缺量$q^*=1\ 095$(件).

故最小库存费用为

$$g(n^*,q^*)=n^*\left[\frac{(C_1+C_2)q^{*2}}{2R}+K\right]+\frac{C_1R}{2n^*}-C_1q^*+\frac{R}{2}\left(a+b+\frac{a-b}{n^*}\right)\approx 616\ 482(\text{元}).$$

参考文献

1 黄洁纲. 存贮论原理及其应用. 上海：上海科学技术文献出版社，1983. 31～53.

2 Aull-Hyde R L. A backlog inventory model during restricted sale periods. J Opl Res Soc，1996，47：1192～1200.

3 周永务. 带有临时价格折扣的库存系统的最优存贮模型. 系统工程理论与实践，1998，10：16～21.

4 Wismer D A，Chattergy R. 非线性最优化引论. 北京：北京工业学院出版社，1987. 38～50.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第10页 Continue from page 10）

$f(x)=(x-\frac{t}{2}(n-1))(x^2+tx+\frac{t^2}{4}(n+1)-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})$是$A$的化零多项式，因此，$A$至多有3个不同的特征值，结合定理4，得$A$恰好有3个不同的特征值.

参考文献

1 Brauer A，Gentry I C. On the characteristic root of tournament matrices. Bull Amer Math Soc，1968，74：1133～1135.

2 Brauer A，Gentry I C. Some remarks on tournament matrices. Linear Algebra and Its Application，1972，(5)：311～318.

3 Brown E，Reid K B. Doubly regular tournament matrices are equivalent to skew-Hadamard matrices. Journal of Combinatorial Theory (Series A)，1972，(12)：332～338.

4 de Caen D，Gregory D A，Kirkland S J et al.. Algebraic multiplicity of the eigenvalues of a tournament matrix. Linear Algebra and Its Application，1992，(169)：179～193.

5 Shader B L. On the tournament. Linear Algebra and Its Application，1992，(162)：335～368.

6 侯耀平. 竞赛矩阵的谱. 湖南师范大学学报，1999，(2)：23～27.

（责任编辑：黎贞崇）