

# 一类食饵种群具有投放率的捕食系统的定性分析\*

## Qualitative Analysis of a Kind of Predator-Prey System Exploited

韦煜明

Wei Yuming

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路3号 541004)

(Coll. of Math. and Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要** 讨论一类食饵种群被开发的两种群捕食系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1 - a_2x^2 - a_3y^3) + s_0, \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1), \end{cases}$$

(其中  $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, s_0 > 0, a_1$  不定号)、平衡点的行为以及系统的全局稳定性. 用 Bendixson 环域定理证明极限环的存在性, 由张芷芬唯一性定理证明极限环的唯一性, 同时对相应结论的生态学意义给予说明.

**关键词** 捕食系统 极限环 平衡点**中图分类号** O175**Abstract** The system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1 - a_2x^2 - a_3y^3) + s_0, \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1), \end{cases}$$

(where  $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, s_0 > 0, a_1$  can be positive or negative), the behaviors of the equilibria and the global stability of the system are studied. The existence of the limit circle is proved by Bendixson Theorem. The uniqueness of the limit circle around the neighborhood of the positive equilibrium exploited by Uniqueness Theorem of Zhang Zifen. The significance of the conclusions are interpreted.

**Key words** predator-prey system, limit circle, equilibrium

被开发的两种群捕食模型最一般的形式是

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) - h, \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) - k, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $h$  与  $k$  可以是常数, 也可以是  $x, y$  或  $t$  的函数. 当  $h$  与  $k$  均为正数时, 表示对两种群的收获(捕捞); 当  $h$  与  $k$  均为负数时, 表示对两种群的投放. 当然, 也可以是  $hk < 0$ . 对于系统(1) 进行一般的讨论是比较繁杂

而困难的问题<sup>[1]</sup>. 本文仅就一类对食饵种群具有投放率的两种群捕食系统进行定性分析, 文中所要讨论的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1 - a_2x^2 - a_3y^3) + s_0, \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, s_0 > 0, a_1$  不定号. 根据生态学意义<sup>[2]</sup>,  $x, y$  分别表示食饵种群和捕食种群的密度,  $a_0$  表示食饵种群的内禀增长率,  $a_1x - a_2x^2$  为密度制约项,  $-a_3y^3$  为捕食率,  $s_0$  表示人类对食饵种群的投放. 其中  $x, y$  在区域  $\Omega = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  中

2002-08-19 收稿.

\* 广西师范大学数学青年科学基金资助.

变动. 所以本文的讨论在区域  $\Omega = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$  和  $\Omega^* = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  上进行.

## 1 主要结论

在系统(2)的定性分析中, 为方便讨论, 一般先作变换:  $x = \bar{x}, y = \sqrt{\frac{a_0}{a_3}} \bar{y}, t = \frac{1}{a_0} \tau$ , 变换后仍用  $x, y, t$  记之, 则系统(2)变为与之等价的系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 + b_1x - b_2x^2 - y^3) + s \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = b_0y(x - 1) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

其中  $b_0 = \frac{1}{a_0} > 0, b_2 = \frac{a_2}{a_0} > 0, s = \frac{s_0}{a_0} > 0, b_1 = \frac{a_1}{a_0}$  不定号. 下面对系统(3)进行定分析.

### 1.1 平衡点性态分析

由  $P(x, y) = 0$ , 有

$$y^3 = 1 + b_1x - b_2x^2 + \frac{s}{x}, \quad (4)$$

令

$$M(x) = 1 + b_1x - b_2x^2 + \frac{s}{x}, \quad (5)$$

当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $M(x) \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $M(x) \rightarrow -\infty$ , 由(4)式解出

$$y = \sqrt[3]{1 + b_1x - b_2x^2 + \frac{s}{x}} \equiv \sqrt[3]{M(x)}, \quad (6)$$

对  $M(x) = 0$ , 即

$$-b_2x^3 + b_1x^2 + x + s = 0, \quad (7)$$

由方程的根与系数的关系知  $M(x) = 0$  只有一个正根, 记为  $x_1$ .

**引理 1** (I) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s \leq 0$  时, 系统(3)在  $\Omega$  内有唯一平衡点  $R_1(x_1, 0)$ ;

(II) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0$  时, 系统(3)在  $\Omega$  内有 2 个平衡点  $R_1(x_1, 0), R_2(1, y_1)$ , 其中  $y_1 = \sqrt[3]{M(1)} = \sqrt[3]{1 + b_1 - b_2 + s}$ .

**引理 2** (I) 当  $x_1 > 1$  时,  $R_1(x_1, 0)$  为鞍点;

(II) 当  $0 < x_1 < 1$  时,  $R_1(x_1, 0)$  为稳定的焦(结)点;

(III) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0, b_1 - 2b_2 - s < 0$  时,  $R_2(1, y_1)$  为稳定的焦(结)点;

(IV) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0, b_1 - 2b_2 - s > 0$  时,  $R_2(1, y_1)$  为不稳定的焦(结)点;

(V) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s < 0$  时,  $R_2(1, y_1)$  为鞍点.

**证明** 由系统(3)的变分矩阵容易得证.

**引理 3** (I) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0$  时,  $R_1(x_1, 0)$  为鞍点, 且  $x_1 > 1$ ;

(I) 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s < 0$  时,  $R_1(x_1, 0)$  为稳定的焦(结)点, 且  $0 < x_1 < 1$ .

### 1.2 平衡点的全局稳定性

在  $\Omega^*$  内, 由系统(3)中  $P(x, y), Q(x, y)$  的符号可知, 最多可将  $\Omega^*$  分成以下 4 个区域:

$$\Omega_1 = \{(x, y) | P > 0, Q < 0\}, \Omega_2 = \{(x, y) | P < 0, Q < 0\}, \Omega_3 = \{(x, y) | P < 0, Q > 0\}, \Omega_4 = \{(x, y) | P > 0, Q > 0\}.$$

**定理 1** 若  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s < 0$ , 则系统(3)的平衡点  $R_1(x_1, 0)$  在  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的.

**证明** 由引理 2(V) 知, 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s < 0$  时,  $R_2(1, y_1)$  在第四象限, 为鞍点. 又由引理 3(II) 知, 此时  $R_1(x_1, 0)$  为稳定的焦(结)点, 且有  $0 < x_1 < 1$ , 在  $\Omega^*$  上除了  $R_1(x_1, 0)$  外, 系统(3)没有其它奇点, 系统(3)在区域  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  中向量场如图 1 所示.

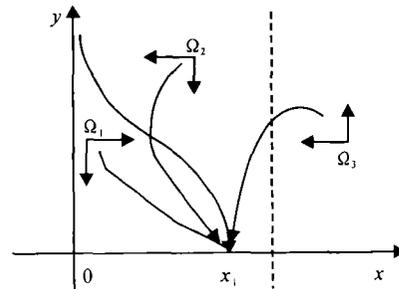


图 1 系统(3)在区域  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  中的向量场

Fig. 1 Vector field of system(3) at  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

若初始点  $(x_0, y_0)$  在区域  $\Omega_1, \Omega_2$  中, 则轨线  $\{x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)\}$  或者进入  $R_1(x_1, 0)$ , 或者与  $P(x, y) = 0$  相交, 由于  $P(x, y) = 0$  在区域  $\Omega^*$  上没有其它平衡点, 再由向量场可知, 与  $P(x, y) = 0$  相交的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时, 仍趋向于  $R_1(x_1, 0)$ , 从区域  $\Omega_3$  中出发的轨线必与直线  $x = 1$  相交, 这是因为在区域  $\Omega_3$  中,  $\frac{dy}{dt} > 0, \frac{dx}{dt} < 0$ , 所以  $\frac{dy}{dx} < 0$ , 当  $y$  适当大时, 有

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \left| \frac{b_0y(x-1)}{x(1+b_1x-b_2x^2-y^3)+s} \right| = \left| \frac{b_0(1-\frac{1}{x})}{y^2 - \frac{x+b_1x^2-b_2x^3+s}{xy}} \right| < M,$$

其中  $M$  为大于零的常数, 故轨线不可能永远停留在  $x = 1$  的右边, 又因为  $y = 0$  是轨线, 而当  $x > 0$  时, 在  $y = 0$  上除平衡点  $R_1(x_1, 0)$  外, 无其它奇点, 所以从区域  $\Omega_3$  出发的轨线必与  $x = 1$  相交进入区域  $\Omega_2$ , 最终当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于  $R_1(x_1, 0)$ . 若初始点为  $(0, y_0)$ , 由(3)可以看出轨线  $\{x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)\}$ , 必进入

区域  $\Omega_1$ , 最后当  $t \rightarrow +\infty$  时, 趋于  $R_1(x_1, 0)$ , 综上所述,  $R_1(x_1, 0)$  在  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的.

定理 1 表明当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s < 0$  时, 系统 (3) 没有正平衡点, 具有可行平衡点  $R_1(x_1, 0)$ , 它在区域  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的, 其生态学意义是捕食者种群最终灭绝, 食饵种群稳定在  $x_1$  水平上.

定理 2 若  $b_1 \leq b_2$  或  $(b_1 - b_2)^2 - 4b_2s \leq 0$ , 则系统 (3) 的正平衡点  $R_2(1, y_1)$  在  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的.

证明 把系统 (3) 变为与之等价的系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[b_1(x-1) - (y^3 - y_1^3) - b_2(x^2 - 1) - \frac{s(x-1)}{x}], \\ \frac{dy}{dt} = b_0y(x-1), \end{cases} \quad (8)$$

对于系统 (8), 在  $\Omega^*$  上构造 Liaponov 函数

$$V(x, y) = 3b_0[(x-1) - \ln x] + [(y^3 - y_1^3) - y_1^3 \ln \frac{y^3}{y_1^3}],$$

显然  $V(x, y)$  在  $\Omega^*$  上是无限大定正函数, 且

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(8)} &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{(8)} = \\ & [3b_0(1 - \frac{1}{x})x + 3y^2(1 - \frac{y_1^3}{y^3})y] \Big|_{(8)} = 3b_0(1 - \frac{1}{x})x \\ & [b_1(x-1) - (y^3 - y_1^3) - b_2(x^2 - 1) - \frac{s(x-1)}{x}] \\ & + 3y^2(1 - \frac{y_1^3}{y^3})b_0y(x-1) = 3b_0(x-1)[b_1(x-1) \\ & - (y^3 - y_1^3) - b_2(x^2 - 1) - \frac{s(x-1)}{x}] + 3b_0(x-1) \\ & (y^3 - y_1^3) = 3b_0[b_1(x-1)^2 - b_2(x-1)^2(x+1) \\ & - \frac{s(x-1)^2}{x}] = -\frac{3b_0(x-1)^2}{x} [-b_1x + b_2(x+1)x \\ & + s] = -\frac{3b_0(x-1)^2}{x} [b_2x^2 - (b_1 - b_2)x + s] = - \\ & \frac{3b_0(x-1)^2}{x} W(x), \end{aligned}$$

其中  $W(x) = [b_2x^2 - (b_1 - b_2)x + s]$ , 当  $x > 0$  时, 若要使  $\frac{dV}{dt} \Big|_{(8)} \leq 0$  只需  $W(x) \geq 0$ , 由于  $W'(x) = 2b_2x - (b_1 - b_2)$ ,  $W''(x) = 2b_2 > 0$ , 所以  $W(x)$  有最小值, 由  $W'(x) = 0$  得  $x_0 = \frac{b_1 - b_2}{2b_2}$ , 所以要  $W(x) \geq 0$ , 只要取  $W(x_0) \geq 0$  即可. 而  $W(x_0) = -\frac{(b_1 - b_2)^2 - 4b_2s}{4b_2}$ , 所以当  $(b_1 - b_2)^2 - 4b_2s \leq 0$  时,

$W(x) \geq 0$ , 从而  $\frac{dV}{dt} \Big|_{(8)} \leq 0$ , 由文献 [7] 知当  $(b_1 - b_2)^2 - 4b_2s \leq 0$  时, 系统 (8), 即系统 (3) 的正平衡点  $R_2(1, y_1)$  在区域  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的; 当  $b_1 \leq b_2$  时,  $b_1$

$-b_2 \leq 0$ , 显然当  $x > 0$  时,  $W(x) > 0$ , 所以  $\frac{dV}{dt} \Big|_{(8)} \leq 0$ , 而集合  $\{(x, y) : \frac{dV}{dt} \Big|_{(8)} = 0\} = \{x = 1\}$  不包含除  $R_2(1, y_1)$  外的任何非平凡正半轨线, 所以由文献 [7] 知系统 (8) 即系统 (3) 的正平衡点  $R_2(1, y_1)$  在区域  $\Omega^*$  上是全局渐近稳定的.

定理 2 的生态学意义是当  $b_1 \leq b_2$  或  $(b_1 - b_2)^2 - 4b_2s \leq 0$  时, 食饵种群与捕食种群长期共存, 稳定在  $R_2(1, y_1)$  上.

### 1.3 极限环的存在性与唯一性

定理 3 若  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0$ ,  $b_1 - 2b_2 - s > 0$ , 则系统 (3) 在正平衡点  $R_2(1, y_1)$  外围至少存在一个稳定的极限环.

证明 当  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0$ ,  $b_1 - 2b_2 - s > 0$  时, 由引理 2(N) 知  $R_2(1, y_1)$  为不稳定的焦(结)点, 又由引理 3(1) 知, 此时  $R_1(x_1, 0)$  为鞍结点, 且  $x_1 > 1$ ; 下面构造一个包含  $R_2(1, y_1)$  的 Bendixson 环域, 如图 2 所示, 作直线  $L_1 \equiv x - x_1 = 0$  与  $x$  轴交于  $A(x_1, 0)$ , 沿系统 (3) 的轨线有

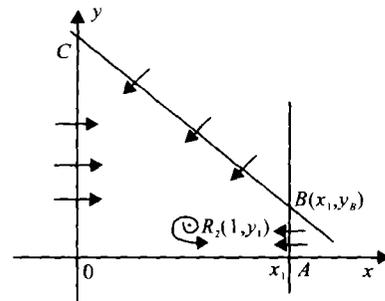


图 2 包含  $R_2(1, y_1)$  的 Bendixson 环域

Fig. 2 Bendixson circle with  $R_2(1, y_1)$

$$\frac{dL_1}{dt} \Big|_{L_1=0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{L_1=0} = x_1 + b_1x_1 - b_2x_1^2 + s - x_1y^3 = -x_1y^3 < 0,$$

故  $L_1 = 0$  为无切线段, 轨线均从  $L_1 = 0$  的右侧穿向左侧 (见图 2), 在直线  $L_1$  上取一点  $B(x_1, y_B)$ , 使得  $y_B \geq y_1$ , 过  $B$  点作直线  $L_2 \equiv -x - y + k = 0$ ,  $L_2$  与  $y$  轴相交与  $C$  点, 沿 (3) 的轨线有

$$\frac{dL_2}{dt} \Big|_{L_2=0} = \left( \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{L_2=0} = x[1 + b_1x - b_2x^2 - (k - x)^3] - s + b_0(k - x)(x - 1),$$

当  $0 \leq x \leq x_1$  时, 对充分大的  $k$  有:  $\frac{dL_2}{dt} \Big|_{L_2=0} < 0$ , 因此当  $0 \leq x \leq x_1$  时  $L_2$  为无切线段, 轨线从  $L_2$  上方穿向下方 (见图 2), 令  $L_3 \equiv x = 0$ , 沿着 (3) 的轨线有  $\frac{dL_3}{dt} \Big|_{L_3=0} = \frac{dx}{dt} \Big|_{L_3=0} = s > 0$ , 故  $L_3 = 0$  为无切线段, 轨线从  $L_3 = 0$  的左边穿向右边 (见图 2); 又因为  $y = 0$  是系统 (3) 的积分直线, 所以折线段  $OA, AB, BC$ ,

CO 构成一个包含  $R_2(1, y_1)$  的 Bendixson 环域, 在此环域内除  $R_2(1, y_1)$  外无其它奇点, 且  $R_2(1, y_1)$  是不稳定的焦(结)点, 由 Bendixson 环域定理知  $R_2(1, y_1)$  外围至少存在一个稳定的极限环.

定理 3 的生态学意义是: 在定理 3 的条件下, 系统(3)产生一个稳定的极限环. 这表明食饵种群与捕食种群最终处于稳定的振荡状态.

定理 4 若  $M(1) = 1 + b_1 - b_2 + s > 0, b_1 - 2b_2 - s > 0$ , 则系统(3)在正平衡点  $R_2(1, y_1)$  外围存在唯一稳定的极限环.

证明 由定理 3 知, 在定理 4 的条件下, 系统(3)在  $R_2(1, y_1)$  外围至少存在一个稳定的极限环, 对系统(3)作如下变换

$$x = \bar{x} + 1, y = \bar{y} + y_1, d\tau = (\bar{x} + 1)dt,$$

则系统(3)变为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = -b_2\bar{x}^2 + (b_1 - 2b_2)\bar{x} - \frac{s\bar{x}}{\bar{x} + 1} - \\ \bar{y}(\bar{y}^2 + 3\bar{y}y_1 + 3y_1^2), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{b_0\bar{x}(\bar{y} + y_1)}{\bar{x} + 1}, \end{cases} \quad (9)$$

再对系统(9)作变换:  $\bar{x} = u, \bar{y} = y_1(e^v - 1)$ , 则(9)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -b_2u^2 + (b_1 - 2b_2)u - \frac{su}{u + 1} - \\ y_1^3(e^{3v} - 1) \equiv -F(u) - \varphi(v), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{b_0u}{u + 1} \equiv g(u), \end{cases} \quad (10)$$

其中  $F(u) = b_2u^2 - (b_1 - 2b_2)u + \frac{su}{u + 1}, \varphi(v) = y_1^3(e^{3v} - 1), g(u) = \frac{b_0u}{u + 1}$ , 系统(10)为广义 Liénard 方程, 因为

$$ug(u) = \frac{b_0u^2}{u + 1} > 0, G(u) = \int_0^u g(s)ds = b_0u - b_0\ln(u + 1), G(-1 + 0) = G(+\infty) = \infty.$$

显然  $G(u) = \int_0^u g(s)ds = b_0u - b_0\ln(u + 1)$  在  $u > -1$  的任何有限子区间内满足 Lipschitz 条件, 又因为

$$v\varphi(v) = vy_1^3(ve^{3v} - 1) = y_1^3(ve^{3v} - v) > 0, v \neq 0,$$

$$\varphi(+\infty) = \infty, \varphi(-\infty) = -y_1^3 < 0, \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(v) = 3y_1^3e^{3v},$$

$$F(0) = 0, f(u) = F'(u) = 2b_2u - (b_1 - 2b_2) + \frac{s}{(u + 1)^2},$$

$f(u)$  在  $u > -1$  上连续且  $f(0) = -(b_1 - 2b_2 - s) < 0$ ,

$$\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = ((s(u + 1)^{-1} - (b_1 - 2b_2)(u + 1) + 2b_2u(u + 1))/b_0u)' = b_0^{-1}u^{-2}(u + 1)^{-2}[2b_2u^2(u + 1)^2 + N(u)],$$

其中多项式  $N(u) = (b_1 - 2b_2)u^2 + 2(b_1 - 2b_2 - s)u + (b_1 - 2b_2 - s)$ , 因为  $\Delta = 4(b_1 - 2b_2 - s)^2 - 4(b_1 - 2b_2)(b_1 - 2b_2 - s) = 4(b_1 - 2b_2 - s)(b_1 - 2b_2 - s - b_1 + 2b_2) = -4s(b_1 - 2b_2 - s) < 0$ , 所以对一切的  $u$  有  $N(u) > 0$ , 从而  $\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' > 0$ , 于是张芷芬唯一性定理的条件全部满足, 由文献[6]及定理 3 知定理 4 得证.

## 2 结束语

上面较为详细地讨论了食饵种群具有常数放养率的两种种群捕食系统(3), 注意到有常数放养率的两种种群捕食系统在第一象限内只有一条分界线, 且当时间  $t$  增加时无轨线离开区域  $\Omega^*$ . 因此, 与对应的未被开发的种群捕食系统比较, 两者有类似的结论, 但对于具有常数收获率的两种种群捕食系统而言, 在区域  $\Omega^*$  内至少有 2 条分界线, 且当时间  $t$  增加时轨线可以经坐标轴离开区域  $\Omega^*$ , 这就增加了定性分析的难度, 这种情况另文讨论.

## 参考文献

- 1 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.
- 2 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 北京: 科学出版社, 1988.
- 3 叶颜谦. 极限环论. 上海: 上海科学技术出版社, 1965.
- 4 GOOBER F, Willanowsik K D. Liapunov approach to multiple hopf bifurcation. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1981, 71: 333~350.
- 5 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- 6 张芷芬. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985.
- 7 廖晓昕. 稳定性数学理论及应用. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988.

(责任编辑: 黎贞崇)