DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2003.01.005

广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (1): 15～17

具有线性变价格物资的库存优化模型
Inventory Optimization Model for Materials with Linear Changeable Price

李乃雄
Li Naixiong

(广西工学院信息与计算科学系　柳州市东环路　545006)
(Dept. of Info. and Comp. Sci., Guangxi Univ. of Tech., Donghuanlu, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要　讨论一类带线性变价格物资的库存系统，以订购次数 n 为主要变量，分别就不允许缺货与允许缺货两种情形建立相应的库存优化模型，给出模型最优解存在的条件，并导出最优解的形式.

关键词　库存　线性　变价格　订购次数　缺货
中图法分类号　O227

Abstract　The optimal inventory problems for materials with linear changeable price are discussed. The inventory models for the situation of unallowed out of stock and allowed out of stock are developed using order times as main variant. The existent conditions of the optimum solution of the models and the form of the optimum solution are given.

Key words　inventory, linear, changeable price, order times, stock out

传统的经济订购量（EOQ）库存模型[1]通常假定物品（或商品）的购买价格是不变的. 即便有价格的变化，也只是限于批量折扣的情形，即不同的批量对应不同的价格，订购数量多时，有一定的价格优惠. 但其价格也只与订购批量有关，而与订购时间无关. 也有些文献涉及到临时价格折扣的问题[2,3]，但考虑的也只是在价格为常数的基础上，在某个订货周期内发生的临时价格变化. 然而，现实的经济行为表明，虽然物品（或商品）在极短的时期内保持恒定的价格，但从一定的时期（如一年）来看，价格总是经常发生变化的，可以认为价格是时间的函数.

本文对一类带线性变价格物资的库存系统，分别就不允许缺货与允许缺货两种情形，建立相应的库存优化模型.

1　线性变价格物资的库存模型 I：不允许缺货

设考察物资的库存时间为 T 单位（如 T 年）. 设物资的价格函数为

$$P(t) = a - \frac{a-b}{T}t, 0 \leqslant t \leqslant T, a > 0, b > 0.$$

设在 $[0,T]$ 内物资的需求量为 R，订购次数为 n，订货周期为 $\frac{T}{n}$，每次的订购数为 $Q = \frac{R}{n}$. 则平均库存量为 $\frac{Q}{2} = \frac{R}{2n}$，第 i 次订购时刻为 $t_i = \frac{i-1}{n}T\ (i = 1,2,\cdots,n)$，第 i 次订购的价格为

$$P(t_i) = P(\frac{i-1}{n}T) = a - \frac{a-b}{T}\cdot\frac{i-1}{n}T = a - \frac{a-b}{n}(i-1),$$

n 次订货的价格总额为

$$V(n) \triangleq \sum_{i=1}^{n}\frac{R}{n}P(t_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{R}{n}[a - \frac{a-b}{n}(i-1)] = \frac{R}{2}(a + b + \frac{a-b}{n}).$$

另设单位物资在 $[0,T]$ 内的平均库存费为 C_1，每次的订购费为 K，则 $[0,T]$ 内的平均库存总费用为

$$f(n) \triangleq \frac{R}{2n}C_1 + Kn + V(n) = \frac{RC_1}{2n} + Kn + \frac{R}{2}(a + b + \frac{a-b}{n}), n \geqslant 1.$$

显然，$f(n)$ 在 $[1,\infty)$ 上连续可微，且

2002-06-11 收稿，2002-09-13 修回。

$$f'(n) = K - \frac{(C_1 + a - b)R}{2n^2},$$
$$f''(n) = \frac{(C_1 + a - b)R}{n^3}.$$

条件 1 若 $C_1 + a - b > 0$，则 $f(n)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格下凸. 特别地，当 $P(t)$ 单调减少即 $a \geqslant b$ 时，$f(n)$ 在 $[1,\infty)$ 上严格下凸.

条件 1 中的条件 $C_1 + a - b > 0$ 的经济含义是指：若 $P(t)$ 严格单调增加，即 $a < b$ 时，存贮期初始时刻物资的价格 $P(0) = a$ 与存贮期末物资的价格 $P(T) = b$ 相差不是太大，即 $b - a < C_1$. 这是符合正常的经济行为的.

在条件 1 的条件下，$f(n)$ 在 $[1,\infty)$ 上有最优解 n^*. 令 $f'(n) = 0$，解得 $n^* = \sqrt{\frac{(C_1 + a - b)R}{2K}}$，$n^*$ 即为最优订购次数. 注意到，当 $a - b = 0$ 即价格 $P(t) = a$ 为常数时，$n^* = \sqrt{\frac{C_1 R}{2K}}$ 即为 EOQ 公式中的最优订购次数. 另外，若 $\sqrt{\frac{(C_1 + a - b)R}{2K}}$ 不是整数时，应四舍五入.

2 线性变价格物资的库存模型 Ⅱ：允许缺货

设符号 R、K、C_1、Q 的意义同模型 Ⅰ. 另外，设短缺允许发生并完全拖后（即短缺量要补），且单位物品单位时间的短缺损失费为 C_2，每周期的短缺量为 q，每周期的最大库存量为 $Q - q$. 如图 1，是一个允许缺货且缺货量要补的批量输入确定性库存模型，则

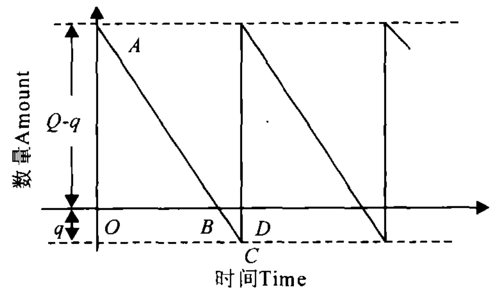

图 1 批量输入的库存模型

Fig. 1 Inventory model for batch input

每周期内的库存费为
$$C_1 \frac{1}{2}(Q - q)\frac{Q - q}{R} = \frac{C_1(Q - q)^2}{2R},$$
这里 $\frac{1}{2}(Q - q)\frac{Q - q}{R}$ 为 ΔOAB 的面积. 从而 $[0,T]$ 内的平均库存费为
$$\frac{C_1(Q - q)^2}{2R}/(Q/R) = \frac{C_1(Q - q)^2}{2Q} = \frac{C_1(R/n - q)^2}{2R/n}.$$

每周期内的库存费为 $C_2 \frac{1}{2} q \frac{q}{R} = \frac{C_2 q^2}{2R}$，这里 $\frac{1}{2} q \frac{q}{R}$ 为 ΔBCD 的面积. 从而 $[0,T]$ 内的平均损失费为 $\frac{C_2 q^2}{2R}/(Q/R) = \frac{C_2 q^2}{2Q} = \frac{C_2 q^2}{2R/n}$.

故在 $[0,T]$ 内的平均库存总费用为
$$g(n,q) \triangleq \frac{C_1(R/n - q)^2}{2R/n} + \frac{C_2 q^2}{2R/n} + Kn + V(n) = n\left[\frac{(C_1 + C_2)q^2}{2R} + K\right] + \frac{C_1 R}{2n} - C_1 q + \frac{R}{2}\left(a + b + \frac{a - b}{n}\right), n \geqslant 1, q > 0.$$

条件 2 若 (i) $C_1 + a - b > 0$；(ii) $\frac{q}{R/n} < \sqrt{\frac{C_1 + a - b}{C_1 + C_2}}$，则 $g(n,q)$ 是 n 和 q 的严格凸函数.

证明 因为 $\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{(C_1 + C_2)q^2}{2R} + K - \frac{(C_1 + a - b)R}{2n^2}$，$\frac{\partial g}{\partial q} = \frac{(C_1 + C_2)nq}{R} - C_1$，所以
$$A \triangleq \frac{\partial^2 g}{\partial n^2} = \frac{(C_1 + a - b)R}{n^3} > 0 (\because C_1 + a - b > 0);$$
$$B \triangleq \frac{\partial^2 g}{\partial n \partial q} = \frac{(C_1 + C_2)q}{R};$$
$$C \triangleq \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = \frac{(C_1 + C_2)n}{R};$$
$$AC - B^2 = \frac{(C_1 + a - b)R}{n^3} \cdot \frac{(C_1 + C_2)n}{R} - \frac{(C_1 + C_2)^2 q^2}{R^2} = (C_1 + C_2)[(C_1 + a - b)(R/n)^2 - (C_1 + C_2)q^2]/R^2 > 0$$
$$\left(\because \frac{q}{R/n} < \sqrt{\frac{C_1 a - b}{C_1 + C_2}}\right).$$

所以，$g(n,q)$ 的 Hesse 矩阵 $H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ 是正定的，因而 $g(n,q)$ 是 $n \geqslant 1, q > 0$ 的严格凸函数.

条件 2 中的条件 $C_1 + a - b > 0$ 的经济意义同条件 1，而条件 $\frac{q}{R/n} < \sqrt{\frac{C_1 + a - b}{C_1 + C_2}}$ 的经济意义是指：每一订货周期内的缺货量 q 占订购量 R/n 的份额不能太大，这也符合正常的经济行为.

在条件 2 的条件下，$g(n,q)$ 存在最优解 (n^*, q^*). 令
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial n} = \frac{(C_1 + C_2)q^2}{2R} + K - \frac{(C_1 + a - b)R}{2n^2} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial q} = \frac{(C_1 + C_2)nq}{R} - C_1 = 0. \end{cases}$$
解得
$$\begin{cases} n^* = \sqrt{\frac{[C_1 C_2 + (C_1 + C_2)(a - b)]R}{2(C_1 + C_2)K}}, \\ q^* = \sqrt{\frac{2C_1^2 KR}{(C_1 + C_2)[C_1 C_2 + (C_1 + C_2)(a - b)]}}. \end{cases}$$

注意到，当 $a-b=0$ 即价格 $P(t)=a$ 为常数时，$n^*=\sqrt{\frac{C_1C_2R}{2(C_1+C_2)K}}$ 即为允许缺货的 EOQ 公式中的最优订购次数，而 $q^*=\sqrt{\frac{2C_1^2KR}{C_1C_2(C_1+C_2)}}$ 即为允许缺货的 EOQ 公式中的最优短缺量.

3 应用：允许缺货

例 1 某厂需订购一批材料，存贮期限为 $T=1$ 年. 已知：需求量 $R=30\ 000$ 件／年，存储费 $C_1=10$ 元／年·件，短缺损失费 $C_2=15$ 元／年·件，订购费 $K=1\ 000$ 元／次，材料的价格为 $P(t)=20-(20-18)t=20-2t, 0\leqslant t\leqslant 1$，在此 $a=20, b=18$. 求最优订购次数及最小库存费用.

解 $n^*=\sqrt{\frac{[C_1C_2+(C_1+C_2)(a-b)]R}{2(C_1+C_2)K}}\approx 10.95$，

$\therefore$ 最优订购次数 $n^*=11$(次).

$\because\ q^*=\sqrt{\frac{2C_1^2KR}{(C_1+C_2)[C_1C_2+(C_1+C_2)(a-b)]}}\approx 1\ 095.44$，

$\therefore$ 最优短缺量 $q^*=1\ 095$(件).

故最小库存费用为

$$g(n^*,q^*)=n^*[\frac{(C_1+C_2)q^{*2}}{2R}+K]+\frac{C_1R}{2n^*}-C_1q^*+\frac{R}{2}(a+b+\frac{a-b}{n^*})\approx 616\ 482(元).$$

参考文献

1 黄洁纲. 存贮论原理及其应用. 上海：上海科学技术文献出版社，1983. 31～53.

2 Aull-Hyde R L. A backlog inventory model during restricted sale periods. J Opl Res Soc，1996，47：1192～1200.

3 周永务. 带有临时价格折扣的库存系统的最优存贮模型. 系统工程理论与实践，1998，10：16～21.

4 Wismer D A，Chattergy R. 非线性最优化引论. 北京：北京工业学院出版社，1987. 38～50.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第 10 页 Continue from page 10）

$f(x)=(x-\frac{t}{2}(n-1))(x^2+tx+\frac{t^2}{4}(n+1)-\frac{\sum_{k=1}^{t-1}k(t-k)b_k}{n-1})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式，因此，$\boldsymbol{A}$ 至多有 3 个不同的特征值，结合定理 4，得 $\boldsymbol{A}$ 恰好有 3 个不同的特征值.

参考文献

1 Brauer A，Gentry I C. On the characteristic root of tournament matrices. Bull Amer Math Soc，1968，74：1133～1135.

2 Brauer A，Gentry I C. Some remarks on tournament matrices. Linear Algebra and Its Application，1972，(5)：311～318.

3 Brown E，Reid K B. Doubly regular tournament matrices are equivalent to skew-Hadamard matrices. Journal of Combinatorial Theory (Series A)，1972，(12)：332～338.

4 de Caen D，Gregory D A，Kirkland S J et al.. Algebraic multiplicity of the eigenvalues of a tournament matrix. Linear Algebra and Its Application，1992，(169)：179～193.

5 Shader B L. On the tournament. Linear Algebra and Its Application，1992，(162)：335～368.

6 侯耀平. 竞赛矩阵的谱. 湖南师范大学学报，1999，(2)：23～27.

（责任编辑：黎贞崇）