DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.02.001
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (2): 81~ 85

半正规、C-正规与有限群的超可解性*

Semi-Normal, C-Normal and Supersolvability of Finite Groups

曾凡辉　李世荣
Zeng Fanhui　Li Shirong

(广西大学数学与信息科学系　南宁市大学路 100号　530004)
(Dept. of Math.& Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　把半正规与 C-正规结合起来,证明若群 G的每个 Sylow 子群的极大子群在 G中或半正规或 C-正规,则 G超可解. 并结合半正规与 C-正规的概念得到了有限群超可解的若干充分条件,同时推广了一些已知结果.

关键词　半正规　C-正规　超可解　Sylow 基
中图法分类号　O152.1

Abstract　In combination of the concepts of semi-normal subgroup and C-normal subgroup, it is proved that G is supersolvable if the maximal subgroup of each Sylow subgroup of G is semi-normal or C-normal in G. Some sufficient conditions are obtained for finite groups to be supersolvable. Some previously known results are generalized.

Key words　semi-normal subgroup, C-normal subgroup, supersolvable, Sylow basis

利用半正规或 C-正规子群研究有限群的超可解性已有相当多的结果,在此我们提及比较有影响的 2个结果. 一个是苏向盈在文献 [1]中的证明: 若群 G的每个 Sylow 子群的极大子群在 G中半正规,则 G超可解;另一个则是王燕鸣在文献 [2]中的证明: 若群 G的每个 Sylow 子群的极大子群在 G中 C-正规,则 G超可解. 本文把半正规与 C-正规结合起来证明: 若群 G的每个 Sylow 子群的极大子群在 G中或半正规或 C-正规,则 G超可解,从而使上述 2个结果得到了推广. 此外,本文还结合半正规与 C-正规这 2个概念得到了有限群超可解的另一些充分条件,推广了文献 [1,2]的某些结果. 以下所讨论的群 G都是指有限群,所用的符号都是规范的,可参阅文献 [3]. 特别地,用 $A < G$表示 A是 G的真子群,而 $A \leqslant G$则表示 A是 G的子群.

1　定义及主要引理

定义 1[1]　群 G的子群 A叫做 (在 G中)半正规的,如果存在一个子群 B使得 $AB = G$,且对 B的任何真子群 B_1, AB_1是 G的真子群. 这样的子群 B叫做 A在 G中的 S-补, A在 G中的 S-补之集合记为 $S_G(A)$.

性质 1[1]　如果 A是 G的半正规子群,则对任意 $x \in G$, A^x是 G的半正规子群,并且 $S_G(A^x) = S_G(A)$. 又若 $B \in S_G(A)$,则对任意的 $y \in G$, $B^y \in S_G(A)$.

性质 2[1]　设 A是 G的半正规子群,则

(1) 如果 $A \leqslant H \leqslant G$,那么 A是 H的半正规子群;

(2) 如果 $N \trianglelefteq G$, $N \leqslant A$,那么 A/N是 G/N的半正规子群,并且如果 $B \in S_G(A)$,那么 $BN/N \in S_{G/N}(A/N)$;

(3) 如果 $N \trianglelefteq G$,则 AN是 G的半正规子群;

(4) 如果 $N \trianglelefteq G$,那么 AN/N是 G/N的半正规子群. 于是对 G的任意同态 θ, A^θ是 G^θ的半正规子群.

定义 2[2]　设 $H \leqslant G$,称 H为 G的 C-正规子群,若存在 $K \trianglelefteq G$使得 $G = HK$且 $H \cap K \leqslant \mathrm{Core}_G(H)$. 为方便讨论,我们还有以下等价定义:

定义 3[4]　设 G为有限群,称子群 H在 G中 C-正规,若存在 $K \trianglelefteq G$使得 $G = HK$且 $H \cap K \trianglelefteq G$.

性质 3[2]　(1) 若 H在 G中 C-正规, $H \leqslant K \leqslant G$,则 H在 K中 C-正规;

(2) 设 $N \trianglelefteq G$, $N \leqslant H$,那么 H在 G中 C-正规当

2002-11-26收稿.
* 国家自然科学基金项目资助 (编号 10161001)和广西自然科学基金资助项目.

且仅当 H/N 在 G/N 中 C-正规.

性质 4[4] 设 $N \trianglelefteq G, H \leqslant G$ 且 $(|N|, |H|) = 1$. 如果 H 在 G 中 C-正规,则 HN/N 在 G/N 中 C-正规.

引理 1[1] 如果 G 的西洛 p-子群 P 是半正规的,则 $S_G(P)$ 中的每个子群是 G 的 p'-Hall 子群. 特别地,在此条件下, G 的 p'-Hall 子群存在.

引理 2[1] 设 G 的 p-子群 P 是半正规的,则 P 与 G 的每个 q-子群 Q 可交换, $p \neq q$.

引理 3[3] 设 G 是有限群且 $\Phi(G) = 1$,则 $F(G)$ 是交换群且

$F(G) = \langle N \mid N$ 是 G 的可解极小正规子群 $\rangle$.

引理 4[3] (**P. Hall**) 设 G 可解,则对任一素数集合 π, G 中 π-子群存在并彼此共轭,且任一 π-子群含于某一 π-Hall 子群之中.

引理 5[3] 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, $P \in Syl_p(G)$ 且 P 循环,则 G 有正规 p-补.

引理 6[3] 设 $|G|$ 是有限群, $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,则

$F(G) = O_{p_1}(G) \times O_{p_2}(G) \times \cdots \times O_{p_s}(G)$.

引理 7[3] 设 G 是有限 p-群,则 $\Phi(G) = G'\mho_1(G)$,且 $G/\Phi(G)$ 是初等交换 p-群. 并且若 $N \trianglelefteq G$, G/N 是初等交换 p-群,则 $\Phi(G) \leqslant N$.

引理 8[3] 设 H 是 G 的 π-Hall 子群, $N \trianglelefteq G$,则 HN/N 是 G/N 的 π-Hall 子群. 若又有 $H \trianglelefteq G, U \leqslant G$,则 $U \cap H$ 是 U 的正规 π-Hall 子群.

引理 9[5] $\prod_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{m+j} = \prod_{k=1}^{m+n} a_k, a_1, a_2, \cdots, a_{m+n} \in G$.

引理 10[5] 设 $A, B \leqslant G$,则 $\langle A, B \rangle = \{g_1 g_2 \cdots g_s \mid g_i \in A$ 或 $B, i = 1, 2, \cdots s\}$.

引理 11 设 $A, B_i \leqslant G$ 且 $AB_i \leqslant G (i = 1, 2)$,则 $A \langle B_1, B_2 \rangle \leqslant G$.

证明 显然 $|A \langle B_1, B_2 \rangle| = |\langle B_1, B_2 \rangle A|$.

$\forall h \in A \langle B_1, B_2 \rangle$,则 $h = a_1 g, a_1 \in A, g \in \langle B_1, B_2 \rangle$. 由引理 10, $g = g_1 g_2 \cdots g_s, g_i \in B_1$ 或 B_2,于是 $h = a_1 g_1 g_2 \cdots g_s$. 由引理 9, $h = (a_1 g_1) g_2 \cdots g_s = (g_1' a_2) g_2 \cdots g_s = g_1'(a_2 g_2) \cdots g_s = g_1'(g_2' a_3) \cdots g_s = \cdots = g_1' g_2' \cdots g_s' a_{s+1} \in \langle B_1, B_2 \rangle A$,其中 $a_i g_i = g_i' a_{i+1}, g_i' \in B_1$ 或 $B_2, a_k \in A, i = 1, 2, \cdots, s, k = 1, 2, \cdots, s+1$. 故 $A \langle B_1, B_2 \rangle \subseteq \langle B_1, B_2 \rangle A$,所以 $A \langle B_1, B_2 \rangle = \langle B_1, B_2 \rangle A$,即 $A \langle B_1, B_2 \rangle \leqslant G$.

推论 1 设 $A, B_i \leqslant G$ 且 $AB_i \leqslant G (i = 1, 2, \cdots, n)$,则 $A \langle B_1, B_2, \cdots, B_n \rangle \leqslant G$.

证明 由归纳法得.

引理 12[5] 设群 G 之子群 H 在 G 内指数等于 $\pi(G)$ 中最小素因数,则 $H \trianglelefteq G$.

引理 13[6] 设 G 是内超可解群,则 G 有如下结构

(1) G 恰含有一个正规 Sylow p-子群 P,且有 $M \leqslant G$ 使 $G = P \rtimes M$, M 超可解;

(2) $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(3) 若 $p > 2$,则 $\exp P = p$;若 $p = 2$,则 $\exp P \leqslant 4$ 且 $p^2 \mid |G|$;

(4) 存在 $c \in P \backslash \Phi(P)$,使 $\langle c \rangle \ntrianglelefteq G$;

(5) $P/\Phi(P)$ 非循环.

引理 14[7] 设 G 为内超可解群, P 为 G 的正规 Sylow p-子群. 若有 $N \trianglelefteq G$ 使 G/N 超可解,则 $P \in Syl_p(N)$.

2 主要结果

定理 1 若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 超可解.

证明 假设 G 是极小阶反例.

(1) 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, $P \in Syl_p(G)$, $P_1 < P$. 如果 $P_1 = 1$,则 $F(G) \neq 1$.

因 $P_1 = 1$,故 P 循环. 由引理 5,可设 G 有正规 p-补 B,则 B 是奇阶群,故 B 可解. 又 $G/B \cong P$,所以 G 可解,即有 $F(G) \neq 1$.

(2) 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, $P \in Syl_p(G)$, $P_1 < P$. 如果 P_1 在 G 中 C-正规,则 $F(G) \neq 1$.

假设不真. 由 (1) 知 $P_1 \neq 1$. 因 P_1 在 G 中 C-正规,故存在 $K \trianglelefteq G$ 使 $G = P_1 K$,且 $P_1 \cap K \leqslant Core_G(P_1) \leqslant O_p(G) \leqslant F(G) = 1$,从而 $P_1 \cap K = 1$. 因此 $K < G$, $p \mid |K|$ 但 $p^2 \nmid |K|$,故 K 有 p 阶 Sylow p-子群,其极大子群为 1,当然在 G 中 C-正规,而 K 其余的 Sylow 子群也是 G 的 Sylow 子群,所以条件对子群 K 遗传,由归纳, K 超可解,从而 $F(K) \neq 1$. 又 $F(K)$ char $K \trianglelefteq G$,故 $F(K) \trianglelefteq G$,所以 $F(K) \leqslant F(G)$,于是 $F(G) \neq 1$,矛盾.

(3) 设 p 是 $|G|$ 的最小素因子, $P \in Syl_p(G)$, $P_1 < P$. 若 $F(G) = 1$,则 P_1 在 G 中半正规,且有 $M \trianglelefteq G$ 使 $|G : M| = p$.

由 (1), (2) 知, $P_1 \neq 1$ 且 P_1 在 G 中半正规,即有 $B \in S_G(P_1)$,使 $G = P_1 B$,且 $\forall B_1 < B$ 有 $P_1 B_1 < G$. 因 $\Phi(G) \leqslant F(G) = 1$,故 $\Phi(G) = 1$. 若 $B = G$,则 $P_1 L < G, \forall L < G$. 由 L 的极大性有, $P_1 L = L$,即 $P_1 \leqslant L$;又由 L 的任意性得, $1 \neq P_1 \leqslant \Phi(G) = 1$,矛盾. 所以 $B < G$,从而有 $M < G$ 使 $B \leqslant M$. 于是 $G = P_1 B =$

P_1M,故 $|G:M|=p$ 的方幂.设 $M=\langle M_p,M_{p_1},\cdots,M_{p_s}\rangle$,$M_p,M_{p_i}$ 分别为 M 的 Sylow p-子群与 Sylow p_i-子群,$i=1,2,\cdots,s$.由于 M_p 不是 G 的 Sylow p-子群,故存在 P_1^* 满足 $M_p\leqslant P_1^*<P^*\in Syl_p(G)$.由(2)知,$P_1^*$ 在 G 中半正规.由引理2得,$P_1^*M_{q_i}\leqslant G$.于是由推论1有,$P_1^*\langle M_p,M_{p_1},\cdots,M_{p_s}\rangle\leqslant G$,即 $P_1^*M\leqslant G$. 由于 $|P_1^*M:P_1^*|=|M:M\cap P_1^*|=|M:M_p|=p'$数,所以 $P_1^*\in Syl_p(P_1^*M)$,所以 $P_1^*M<G$.因 $M\leqslant P_1^*M$,故由 M 的极大性得,$P_1^*M=M$.从而 $P_1^*=M_p$,$|G:M|=p$,由引理12知,$M\trianglelefteq G$.

(4) 设 $1\neq N\trianglelefteq G$ 且 $N\leqslant O_p(G)$,$p\in\pi(G)$,则 G/N 超可解.

设 T/N 是 G/N 的 Sylow q-子群,$T_1/N<T/N$.若 $q=p$,则 T 为 G 的 Sylow 子群,而 $T_1<T$,所以 T_1 在 G 中半正规或 C-正规.由半正规和 C-正规的性质知,T_1/N 在 G/N 中半正规或 C-正规;若 $q\neq p$,则由 Zassenhaus定理知,$T=QN$,$Q\in Syl_q(G)$,于是 $T_1=T_1\cap T=T_1\cap QN=(T_1\cap Q)N$.令 $Q_1=T_1\cap Q$,比较阶知,$Q_1<Q$,所以 Q_1 在 G 中半正规或 C-正规.又 $(|Q_1|,|N|)=1$,由半正规及 C-正规的性质知,$T_1/N=Q_1N/N$ 在 G/N 中半正规或 C-正规,故 G/N 满足定理的假设条件.由归纳,G/N 超可解.

(5) G 可解.

若 $F(G)\neq 1$,即有某个 $p\in\pi(G)$ 使 $O_p(G)\neq 1$.由(4)知 $G/O_p(G)$ 超可解,此时 G 显然已可解.

若 $F(G)=1$.设 p 为 $|G|$ 的最小素因子.由(3),存在 G 的正规极大子群 M 使 $|G:M|=p$,且 G 的 Sylow p-子群的极大子群在 G 中半正规.设 $M_p\in Syl_p(M)$,则 M_p 是 G 的 Sylow p-子群的极大子群,所以 M_p 在 G 中半正规,从而在 M 中也半正规,即有 $H\in S_M(M_p)$.由引理1知,H 为 M 的 p'-Hall子群.显然,H 也是 G 的 p'-Hall子群.由于 H 中的每一 Sylow 子群的极大子群也是 G 的 Sylow 子群的极大子群,故 H 满足定理假设条件,由归纳 H 超可解.设 $\{H_{p_1},H_{p_2},\cdots,H_{p_s}\}$ $(p_i\neq p,i=1,2,\cdots,s)$ 是 H 的一组 Sylow基.由引理2,M_p 与每一 H_{p_i} 可交换,于是 $\{M_p,H_{p_1},H_{p_2},\cdots,H_{p_s}\}$ 是 M 的 Sylow 基,故 M 可解.又 G/M 是 p-阶循环群,所以 G 可解.

(6) G 有唯一极小正规子群 N,使 $G=N\rtimes M$,$M<G$,M 超可解且 $C_G(N)=N=F(G)$.

设 N 是 G 的极小正规子群.因 G 可解,故可设 N 是初等 Abel p-群.由(4)知,G/N 超可解.若 G 还有另一极小正规子群 N^*,则同理可得,G/N^* 超可解,所以 $G/(N\cap N^*)$ 超可解.又因 $N\cap N^*=1$,故 G 超可解,矛盾,所以 N 是 G 的唯一极小正规子群.若 $\Phi(G)\neq 1$,则有 $N\leqslant\Phi(G)$,于是 $G/\Phi(G)\cong(G/N)/(\Phi(G)/N)$,故 $G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解,矛盾,故 $\Phi(G)=1$.由引理3得,$F(G)=N$.又 $\Phi(G)=1$,即有 $M<G$ 使 $N\not\leqslant M$.显然 $NM=G$.因 $N\cap M\trianglelefteq M$ 且 N 是交换的,所以 $N\cap M\trianglelefteq NM=G$,而 $N\not\leqslant N\cap M$,由 N 的唯一极小正规性得 $N\cap M=1$,所以 $G=N\rtimes M$.又因 $C_G(N)\trianglelefteq N_G(N)=G$,所以 $C_G(N)\cap M\trianglelefteq M$,从而有 $C_G(N)\cap M\trianglelefteq NM=G$.由于 $N\not\leqslant C_G(N)\cap M$,所以 $C_G(N)\cap M=1$.从而 $C_G(N)=C_G(N)\cap NM=N(C_G(N)\cap M)=N$.

(7) $|N|=p$,完成证明.

令 q 为 $|G|$ 的最大素因子,假设 $q\neq p$.令 $Q\in Syl_q(G)$,则 QN/N 是 G/N 的 Sylow q-子群.因 G/N 超可解,故 $QN/N\trianglelefteq G/N$.设 $P\in Syl_p(G)$,由于 N 是 G 的正规 p-子群,故 $N\leqslant P$,所以 $P/N\in Syl_p(G/N)$,于是 $QN/N\cdot P/N\leqslant G/N$,即 $QNP=QP\leqslant G$.显然 QP 满足定理条件.若 $QP<G$,则由归纳,QP 超可解,所以 $Q\trianglelefteq QP$.于是 $QN=Q\times N$,故 $Q\in C_G(N)=N$,矛盾,所以 $QP=G$.若 $N\leqslant\Phi(P)$,由(6)有,$P=P\cap NM=N(P\cap M)=P\cap M$,故 $P\leqslant M$,从而 $N\leqslant M$,故 $G=NM=M$,矛盾.所以 $N\not\leqslant\Phi(P)$,即有 $P_1<P$ 使 $N\not\leqslant P_1$.当 $P_1=1$ 时,则 $N=P$ 且 $|N|=p$,(7)已成立,故设 $P_1\neq 1$.由定理假设知,P_1 在 G 中半正规或 C-正规.

若 P_1 在 G 中半正规,由引理2,$P_1Q\leqslant G$,$|G:P_1Q|=|PQ:P_1Q|=p$.由引理12,$P_1Q\trianglelefteq G$,从而 $N\leqslant P_1Q$,即 $N\leqslant P_1\in Syl_p(P_1Q)$,矛盾.这样 P_1 在 G 中 C-正规,即有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=P_1K$,且 $P_1\cap K\leqslant Core_G(P_1)\leqslant F(G)=N$.由 N 的唯一极小正规性及 $N\not\leqslant Core_G(P_1)$ 得,$Core_G(P_1)=1$.于是 $P_1\cap K=1$,从而 $p^2\nmid|K|$.K 满足定理假设条件且 $K<G$,由归纳,K 超可解.又 K 的 Sylow q-子群也是 G 的 Sylow q-子群.设 $K_q\in Syl_q(K)$,则有 $x\in G$ 使 $Q=K_q^x$,而 $K\trianglelefteq G$,所以 $K_q^x\leqslant K$,所以 $Q=K_q^x\leqslant K$,所以 $Q\trianglelefteq K$,故 Q char $K\trianglelefteq G$,从而 $Q\trianglelefteq G$.这样 $N\leqslant Q$,矛盾.所以 $q=p$,即 p 是 $|G|$ 中的最大素因子.

因 G/N 超可解,故 $P/N\trianglelefteq G/N$,即 $P\trianglelefteq G$,所以 $P\leqslant F(G)=N$.由此得 $N=P$.设 $N_1<N$,则 N_1 在 G 中半正规或 C-正规.若 N_1 在 G 中半正规,即有 $B\in S_G(N_1)$ 使 $G=N_1B$.由(6)有,$G=N\rtimes M$,M 为 G 的 p'-Hall子群.又因 G 可解,故 B 有 p'-Hall子群 B_1 且 $B_1<B$.显然 B_1 也是 G 的 p'-Hall子群.由引理4知,存在 $x\in G$ 使 $B_1=M^x$.由性质1,可设 $M<B$,即有 $N_1M<G$.由于 $M<G$,故 $N_1M=M$,即 $N\leqslant M$.

所以 $N\leqslant M\cap N=1$,即 $N_1=1$,所以 $|N|=p$.若 N_1 在 G 中 C-正规,由定义 3,即有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=N_1K$ 且 $N_1\cap K\trianglelefteq G$.由 $N\not\leqslant N_1\cap K$ 及 N 的唯一极小正规性得 $N_1\cap K=1$.又因 $N\leqslant K$,所以 $N_1=N_1\cap K=1$,从而 $|N|=p$.总之 $|N|=p$,(7)证毕.

由(6),(7)知,G/N 超可解,且 N 是素数阶循环群,故 G 超可解.矛盾.所以极小阶反例不存在,G 超可解.

推论 2 若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规,则 G 超可解.

推论 3 若群 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中 C-正规,则 G 超可解.

定理 2 设 $N\trianglelefteq G$,G/N 超可解.若 N 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 超可解.

证明 假设定理不成立,设 G 为极小阶反例.

(1)条件对子群遗传,G 内超可解.

事实上,$\forall H<G$,因 $HN/N\cong H/H\cap N$,故由 HN/N 超可解知,$H/H\cap N$ 超可解.由半正规及 C-正规的性质知,$H\cap N$ 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 H 中半正规或 C-正规,从而 H,$H\cap N$ 满足条件,由归纳,H 超可解.

(2)由引理 13知,G 有正规 Sylow p-子群 P 且 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群.又由引理 14知,$P\leqslant N$.

(3)矛盾的导出.

设 $x\in P\setminus\Phi(P)$,则由引理 13有,$o(x)=p$ 或 4.依题意,$<x>$ 在 G 中半正规或 C-正规.

若 $<x>$ 在 G 中半正规,则有 $B\in S_G(<x>)$ 使 $G=<x>B$,且 $\forall A<B$ 有,$<x>A<G$.令 $B=<B_p,B_{q_1},\cdots,B_{q_s}>$,$B_p\in Syl_p(B)$,$B_{q_i}\in Syl_{q_i}(B)$,$q_i\neq p$,$i=1,2,\cdots,s$.则 $<x>B_{q_i}\leqslant G$,$<x>=<x>B_{q_i}\cap P\trianglelefteq <x>B_{q_i}$,于是 $B_{q_i}\leqslant N_G(<x>)$.因 $P\trianglelefteq G$,所以 $B_p\leqslant P$.由引理 7,$P/\Phi(P)$ 交换,所以 $<x>\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq <x>B_p\Phi(P)/\Phi(P)$.又 $<x>\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq <x>B_{q_i}\Phi(P)/\Phi(P)$,所以 $1\neq <x>\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq <x><B_p,B_{q_1},\cdots,B_{q_s}>\Phi(P)/\Phi(P)=<x>B/\Phi(P)=G/\Phi(P)$,于是 $<x>\Phi(P)=P$,从而 $<x>=P$,与引理 13矛盾.这样 $<x>$ 在 G 中 C-正规,即有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=<x>K$,且 $<x>\cap K\leqslant Core_G(<x>)$.令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\trianglelefteq G$.若 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap <x>K=<x>(P\cap K)=<x>$,与引理 13矛盾,故 $P_1\not\leqslant\Phi(P)$.于是 $1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,所以 $P_1\Phi(P)=P$,即 $P_1=P$.从而 $P\leqslant K$,$<x>=<x>\cap K\leqslant <x>_G$,所以 $<x>=<x>_G\trianglelefteq G$,故 $1\neq <x>\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$.所以 $<x>\Phi(P)=P$,即 $<x>=P$,与引理 13矛盾.所以极小阶反例不存在,G 超可解.

推论 4 设 $N\trianglelefteq G$,G/N 超可解.若 N 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半正规,则 G 超可解.

推论 5 设 $N\trianglelefteq G$,G/N 超可解.若 N 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 超可解.

推论 6 若群 G 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 超可解.

推论 7 若群 G 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中半正规,则 G 超可解.

推论 8 若群 G 之素数阶子群及 2^2 阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 超可解.

定理 3 设 M 为群 G 的正规 Hall子群且 G/M 超可解.若 M 的 Sylow子群的极大子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 超可解.

证明 假设定理不真,设 G 为极小阶反例.

由定理 1知,M 是超可解的,由 G/M 的超可解性得,G 是可解的.设 N 是 G 的极小正规子群,则可设 N 是初等交换 p-群.

(1)条件对 G/N 遗传,G/N 超可解,N 是 G 的唯一极小正规子群.

因为 $MN/N\trianglelefteq G/N$,且由引理 8知,MN/N 是 G/N 的 Hall子群,$(G/N)/(MN/N)\cong G/MN\cong(G/M)/(MN/M)$,所以 $(G/N)/(MN/N)$ 超可解.

若 $N\leqslant M$,则 $MN/N=M/N$.设 T/N 是 M/N 的 Sylow q-子群,$T_1/N\lessdot T/N$.若 $q=p$,则 T 是 M 的 Sylow q-子群,$T_1\lessdot T$,T_1 在 G 中半正规或 C-正规,从而 T_1/N 在 G/N 中半正规或 C-正规;若 $q\neq p$,则由 Zassenhaus 定理,$T/N=T^*N/N$,$T^*\in Syl_q(M)$,于是 $T_1=T_1\cap T^*N=(T_1\cap T^*)N$.设 $T_1^*=T_1\cap T^*$,比较可知,$T_1^*\lessdot T^*$.又 $(|T_1^*|,|N|)=1$,故 $T_1/N=T_1^*N/N$ 在 G/N 中半正规或 C-正规.故此时 G/N 满足定理的条件.若 $N\not\leqslant M$,因 M 是 G 的 Hall子群,故 $(|M|,|N|)=1$.与前面 $q\neq p$ 的情形类似地讨论.总之,G/N 满足定理的假设,由归纳,G/N 超可解.假设 N^* 是 G 的另一个极小正规子群,则同理可得,G/N^* 超可解,所以 $G/(N\cap N^*)$ 超可解.又 $N\cap N^*=1$,故 G 超可解,矛盾.所以 N 是 G 的唯一极小正规子群.

(2)$\Phi(G)=1$,$C_G(N)=N=F(G)$,且有 $H<G$ 使 $G=N\rtimes H$.

若 $\Phi(G)\neq 1$,则 $N\leqslant\Phi(G)$,于是 $G/\Phi(G)\cong$

$(G/N)/(\Phi(G)/N)$,所以 $G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G 超可解,矛盾,故 $\Phi(G)=1$. 于是存在 $H<G$ 使 $N\not\leq H$,所以 $G=NH$.由引理 3,$F(G)=N$.因 $N\cap H\trianglelefteq H$ 且 N 是交换的,所以 $N\cap H\trianglelefteq NH=G$,由 $N\not\leq N\cap H$ 及 N 的唯一极小正规性得,$N\cap H=1$,所以 $G=N\rtimes H$. 又因 $C_G(N)\trianglelefteq N_G(N)=G$,所以 $C_G(N)\cap H\trianglelefteq H$,从而有 $C_G(N)\cap H\trianglelefteq NH=G$.因 $N\not\leq C_G(N)\cap H$,所以 $C_G(N)\cap H=1$.而 $C_G(N)=C_G(N)\cap NH=N(C_G(N)\cap H)=N$.

(3) $N\in Syl_p(M)$.

由于 M 超可解,设 q 是 $|M|$ 的最大素因子,$M_q\in Syl_q(M)$,则 $M_q\trianglelefteq M$,所以 M_q char $M\trianglelefteq G$,故 $M_q\trianglelefteq G$.所以 $M_q\leqslant F(G)=N$,由 N 的唯一极小性得 $M_q=N$,即 $q=p$,$N\in Syl_p(M)$.

(4) $|N|=p$,完成证明.

假设不真.设 $N_1<N$,则 $N_1\neq 1$.由(3),N_1 在 G 中半正规或 C-正规.若 N_1 在 G 中半正规,设 $B\in S_G(N_1)$,则 $G=N_1B$.若 $B=G$,则由半正规的定义,$\forall L<G$,有 $N_1L<G$,由 L 的极大性有 $N_1L=L$,即 $N_1\leqslant L$,再由 L 的任意性得 $1\neq N_1\leqslant\Phi(G)=1$,矛盾.故 $B<G$,$N_1\not\leq B$.又因 N 是交换的,所以 $N\neq N\cap B\trianglelefteq N_1B=G$.由 N 的唯一极小正规性得,$N\cap B=1$.于是 $N=N\cap G=N\cap N_1B=N_1(N\cap B)=N_1$,矛盾.这样 N_1 在 G 中 C-正规,由定义 3,有 $K\trianglelefteq G$ 使 $G=N_1K$ 且 $N_1\cap K\trianglelefteq G$.因 N 是 G 的唯一极小正规子群,故 $N\leqslant K$,所以 $N_1=N_1\cap K\trianglelefteq G$,由 N 的唯一极小正规性得,$N_1=1$,矛盾.这样,G/N 超可解,且 N 是素数阶循环群,故 G 超可解,矛盾.所以极小阶反例不存在,G 超可解.

推论 9 设 M 为群 G 的正规 Hall 子群且 G/M 超可解.若 M 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 C-正规,则 G 超可解.

从定理 3 的证明过程可看出,对"半正规"而言,我们可以把条件进一步减弱,我们易证

定理 4 设 M 为群 G 的正规子群且 G/M 超可解.若 M 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中半正规,则 G 超可解.

与定理 3 的证明类似,我们还可以证

定理 5 设 M 是 G 的正规极大子群.若 M 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 超可解.

参考文献

1 苏向盈.有限群的半正规子群.数学杂志,1988,8(1):5~9.

2 Wang Y M. C-Normality of groups and its properties. J of Algebra,1996,180:954~965.

3 徐明曜等.有限群导引(上,下).北京:科学出版社,1999.

4 王燕鸣.极小子群对有限群结构的影响.数学学报,2001,44(2):197~200.

5 张远达.有限群构造(上).北京:科学出版社,1982.

6 陈重穆.内外-Σ群与极小非Σ群.重庆:西南师范大学出版社,1988.

7 王品超,温凤桐,李文祥.有限群的 C-正规子群.曲阜师范大学学报,1997,23(4):5~7.

(责任编辑:黎贞崇)