DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.02.002
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (2): 86~ 91

一类运输问题的非线性规划模型*

A Continuum and Nonlinear Programming Model of Transport Problem

何登旭　曹敦虔　莫永向**　宋学强
He Dengxu　Cao Dunqian　Mo Yongxiang　Song Xueqiang

(广西民族学院数学与计算机科学系　南宁市大学路 80号　530006)
(Dept. of Math. and Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, 80 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要　针对路费与路线长度的非线性关系、目的地的需求量及货物的未知价格等影响因素,建立钢管定购和运输问题的二次规划模型,并通过 LINGO6.0软件,成功地求解这一类复杂运输问题,从而得到完整的购运计划。该模型具有一般性,可推导至类似问题中。

关键词　运输问题　数学模型　非线性规划　最省路径
中图法分类号　O221.2　U116

Abstract　A second time programming model for purchase and transportation of steel tubes is developed for a linear programming mode of transport cost and path length, demand of destinations and unknown price of goods, A complex problem are sloved using the software LINGO6.0. The model could be genelized and applied to solution of similar problems.

Key words　transport problem, mathematical model, nonlinear programming, shortest path

1 问题简述

要铺设 1条 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_{15}$的输送天然气的主管道,如图 1所示.附近有 7个钢厂 $S_1, S_2, \cdots, S_7$可以生产这种主管道钢管.图中粗线表示铁路,单细线表示公路,双线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路,或者建有施工公路),圆圈表示火车站,每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km).

为方便计,1 km主管道钢管称为 1单位钢管.

1个钢厂如果承担制造这种钢管,至少需要生产 500个单位.

钢厂 S_i在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 s_i个单位,钢管出厂销价 1单位钢管为 P_i万元,如表 1.单位钢管的铁路运价如表 2. 1 000 km以上每

表 1　钢厂钢管产量及单价

Table 1　Yield and unit price of steel tubes of a steel mill

i	s_i (单位 Unit)	P_i (万元 Tenthousand yuan)
1	800	160
2	800	155
3	1 000	155
4	2 000	160
5	2 000	155
6	2 000	150
7	3 000	160

表 2　铁路运价

Table 2　Transport costs of railway

里程 Mileage (km)	运价 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)	里程 Mileage (km)	运价 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)
≤ 300	20	501~ 600	37
301~ 350	23	601~ 700	44
351~ 400	26	701~ 800	50
401~ 450	29	801~ 900	55
451~ 500	32	901~ 1 000	60

2002-11-22收稿, 2003-02-09修回。
* 广西新世纪高等教育教学改革工程项目,广西民族学院重点科研项目。
** 桂林电子工业学院计算科学与应用物理系　桂林　541004
(Dept. of Comp. Sci. and Applied Phy., Guilin Univ. of Elec. Tech., Guilin, Guangxi, 541004, China).

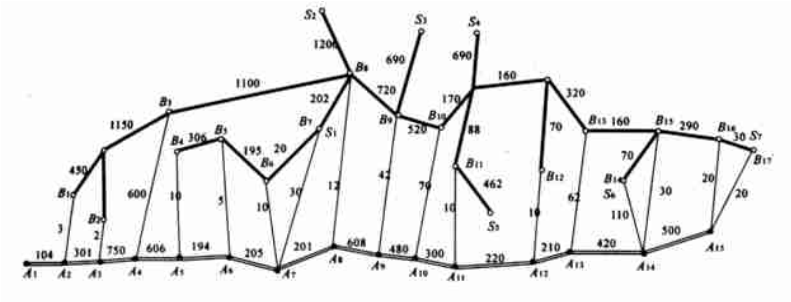

图 1　钢管运输路线

Fig. 1　Transport route of steel tubes

增加 1至 100 km运价增加 5万元.

公路运输费用为 1单位钢管每公里 0.1万元(不足整 km部分按整 km计算).

钢管可由铁路、公路运往铺设地点(不只是运到 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$, 而是管道全线).

问题 **1** 请制定一个主管道钢管的订购和运输计划,使总费用最小(给出总费用).

问题 **2** 如果要铺设的管道不是一条线,而一个树形图,铁路、公路和管道构成网络,请就这种更一般的情形给出一种解决办法,并对图 2按问题 1的要求给出模型和结果.

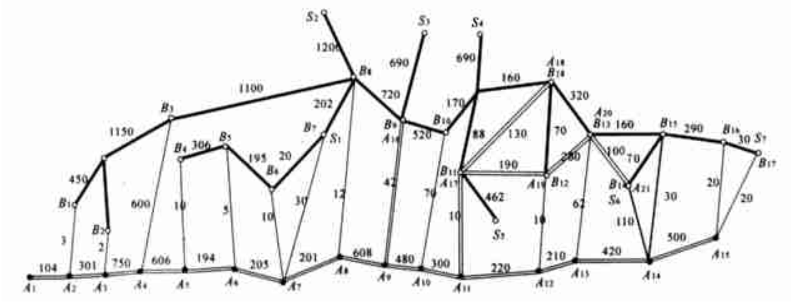

图 2　钢管运输路线

Fig. 2　Transport route of steel tubes

2　问题分析

为了求出定购计划,首先应该知道从各钢厂到各铺设路段运送单位钢管所需费用最小的路径.为此,我们定义:

定义 **1** 使得从钢厂 S_i 运送单位钢管到铺设端点 A_j 的费用最小的路径称为从 S_i 到 A_j 的最省路径.

如果可以预先知道运往各铺设端点的钢管量,那么原问题就是一个纯粹的运输问题,而运输问题已经有着比较成熟的解法[1,3].然而我们遇到的并非如此简单.各铺设端点只有一个相当大的取值范围(而不是一个确定的值),确定这些值只能由运输和铺设的限制条件以及费用极小来决定.

由于需铺设的总长度是相当长的,而一根钢管的长度相对来说就小得多,所以可以认为:从铺设端点运送钢管到铺设地点时,钢管是连续不断、均匀地卸下的.

基于以上原因,我们决定,首先求出各钢厂到各铺设端点的最省路径,然后根据限制条件和费用极小建立连续型规划模型,最后求出整个购运计划.

3　模型假设

假设 **1** 施工公路与普通公路路况一样;

假设 **2** 在实际运输时,经过的路径不会出现这样的情况:公路夹于两段铁路之间,或铁路夹于两段公路之间;

假设 **3** 在实际运输时,总是这样来运输的:先运往铺设端点(指 $A_1, A_2, \cdots$)再运到铺设地点;

假设 **4** 铺设是均匀、连续的,卸货也是均匀、连续的.

在后面的论述中,我们总是假设所有的钢管量以 km为单位,所有的费用以万元为单位.

4　模型建立

首先,我们针对图 1建立数学模型.

4.1　最省路径

容易知道,要使总费用最小,所走的路径就应该是最省路径.所以我们首先求出各条最省路径.

对于在一般赋权图中求最短路径问题已有许多成熟的方法,可以运用到这里.但由于铁路费用比较特殊(单位路长费用不是定值),所以必须做些特殊处理.经过观察我们发现,图 1中所有铁路及火车站构成一颗树,要把钢管从任一钢厂运至铺设地点上都必须至少经过一个交接点(B_i),再根据假设 2,每一次运输只能经过 1个交接点.这样,在一次运输中,经过的铁路将是连接出发点(钢厂)和交接点的那条通路.不妨把它们直接用铁路连起来.这样我们可以按照如下方法构造新图:

(Ⅰ)在图 1中将所有的钢厂与交接点全部用铁路连接起来,铁路长度与图 1中相应的铁路总长度一样.如果某个点既是钢厂又是交接点,则把它们拆成 2个点,1个代表钢厂,1个代表交接点,它们之间的

铁路长度赋值为 0.

(II)略去图 1中的铁路及火车站(除交接点外).

这样就得到 1个新图,重新摆放各点的位置后的形状如图 3.

我们给图 3的所有边都赋予边权,它们的值是运送单位钢管经过该边的费用(而不是路的长度).

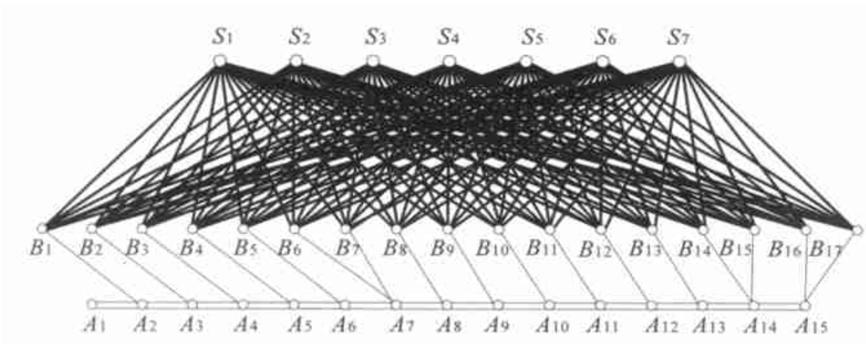

图 3 与图 1等效的简化图

Fig. 3 Simplified fig. 1

在此必须说明的是,在假设 2的前提下,图 1与图 3是等效的.等效的意思是指:在图 1中从任何 1个钢厂走到任何 1个铺设点,不管所走的是哪一条路,在图 3中都有惟一的路径与之相对应,并且费用相等.这样,图 3中的所有的边权值都可以从图 1及铁路、公路运价求出.譬如,$S_1B_1 = 160, B_1A_2 = 0.3, A_1A_2 = 10.4$. 由于篇幅关系,在此不再一一给出.

图 3是一个典型的赋权图,可用 Dijkstra算法[3]、逐次逼近法[4]等算法求出从 S_i 到 A_j 的最省路径和相应费用,在此我们采用逐次逼近法.为节省篇幅,结果在此将不给出,读者可自行计算,程序可参见文献[4].

4.2 目标函数(费用表达式)

设从钢厂 S_i 运往铺设端点 A_j 的钢管量为 x_{ij},那么,购买费用为

$$J_1 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} P_i x_{ij}.$$

用 w_{ij} 表示从 S_i 到 A_j 的最省路径相应的费用,则运输过程中的费用为

$$J_2 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} (w_{ij}) x_{ij}.$$

因为钢管运到铺设端点 A_j 后,还要运往铺设地点.在图 3中,铺设端点的度最大为 2,所以每个端点运送的方向最多有 2个,可设 A_j 向左运送的钢管量为 L_j,向右运送的钢管量为 R_j,显然有

$$R_j + L_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}, j = 1, 2, \cdots, 15, R_{15} = 0, L_1 = 0. \quad (1)$$

再由假设 4,卸货是均匀的,当从铺设端点 A_j 向左运输钢管走了 t km时,剩余在车上的钢管量为 $L_j - t$,所以将钢管运至 A_j 后再向左运输需要的费用

$$(J_3)_j^L = e\cdot\int_0^{L_j}(L_j - t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot eL_j^2.$$

其中 e是运输 1单位钢管每公里的公路运费。

同理,将钢管运至 A_j 后再向右运输需要的费用

$$(J_3)_j^R = e\cdot\int_0^{R_j}(R_j - t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot eR_j^2.$$

因此这期间的总费用为

$$J_3 = \sum_{j=1}^{15}((J_3)_j^L + (J_3)_j^R) = \sum_{j=1}^{15}\frac{1}{2}\cdot e(L_j^2 + R_j^2).$$

购买费用、从钢厂运往铺设端点的费用、从铺设端点运至铺设地点的费用构成了全部费用的总和.所以,总费用为

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} P_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} w_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{15}\frac{1}{2}\cdot e(L_j^2 + R_j^2). \quad (2)$$

4.3 约束条件

根据需铺设的钢管总长度为 5171个单位,而且运输量总是非负的,所以

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} x_{ij} = 5171. \quad (3)$$

再根据假设 4,铺设是均匀的(不重叠不遗漏),所以有

$$R_j + L_{j+1} = A_jA_{j+1}, j = 1, 2, \cdots, 14, \quad (4)$$

其中 A_jA_{j+1} 表示从 A_j 到 A_{j+1} 需要铺设钢管的长度.

由于钢厂 S_i 的产量上限为 s_i,所以

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \leqslant s_i, i = 1, 2, \cdots, 7. \quad (5)$$

而每个钢厂都有自己的产量下限.如果生产,则必须不小于 500,否则就不生产,产量为 0.即

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} = 0, 或 \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \geqslant 500, i = 1, 2, \cdots, 7, \quad (6)$$

为了方便求解,我们将上式改写成如下等价形式(在产量非负的条件下):

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij}\left(\sum_{j=1}^{15} x_{ij} - 500\right) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, 7. \quad (7)$$

4.4 数学模型

由(1)~(7)可以得到一个连续非线性规划模型:

$$\min J = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} P_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} w_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{15} \frac{1}{2} \cdot e(L_j^2 + R_j^2).$$

S. T.

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} x_{ij} = 5\ 171.$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \leqslant s_i, i = 1, 2, \cdots, 7,$$

$$R_j + L_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}, j = 1, 2, \cdots, 15, R_{15} = 0, L_1 = 0. \quad (9)$$

$$R_j + L_{j+1} = A_j A_{j+1}, j = 1, 2, \cdots, 14,$$

$$\sum_{j=1}^{15} x_{ij} \left(\sum_{j=1}^{15} x_{ij} - 500\right) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, 7,$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \cdots, 7, j = 1, \cdots, 15.$$

这就是我们所要建立的钢管购运计划数学模型 .

5 模型求解

这是 1个非线性规划模型. 由于模型中变量太多, 人工求解很难进行. 我们使用数学软件 LINGO6. 0,成功地求解这个模型 ,从而得到完整的购运计划. 首先是去钢厂购买钢管的计划 ,表 3列出了具体的购买方案 ,所花费用 $J_1 = 797\ 725$; 然后是将钢管运至铺设端点 ,运输方案也在表 3中给出 ,运输费 $J_2 = 399\ 731.55$; 最后是把钢管从铺设端点运到铺设地点 ,表 4给出了运输方法 ,运输费 $J_3 = \sum_{j=1}^{15} \frac{1}{2} e(R_j^2 + L_j^2) = 80\ 916.45$. 这样总费用就是 $J = J_1 + J_2 + J_3 = 1\ 278\ 373$.

6 模型强化

如果要铺设的管道不是一条线 ,而是一个树形图 ,铁路、公路和管道构成网络 ,我们的方法同样是适用的 ,因为在求最省路径时 ,我们并不排除铁路、公路和管道构成网络的情形 .实际上 ,图 2与图 1的差别主要是铺设端点的度数不同 . 因此 ,只要对第一个模型稍作修改 ,就可以解决这种更一般的情形了 .

对图 2运用相同的方法进行改造 ,得到的新图如图 4所示 ,其中的边权可以根据图 2求出 .

在图 4中 ,铺设路径上的结点的最大度数为 3,

表 3 在图 1中从钢厂购买钢管然后运到铺设端点的计划

Table 3 Plans on conveying of the steel tubes purchased from steel mill to the paving point in Fig. 1

钢厂 Steel mill	购买量 Purchase (单位 Units)	购买费用 Expenses (万元 Tenthousand yuan)	运输路径 (在图 1中) Transport route (in fig 1)	运量 x_{ij} Quantites x_{ij} (单位 Units)	单价 Unit price (万元 Tenthousand yuan)	运费 Transport costs (万元 Tenthousand yuan)
S_1	800.0	128000	$S_1B_6B_5B_4A_5$	334.5	38.0	12711.0
			$S_1B_6B_5A_6$	200.0	20.5	4100.00
			$S_1B_7A_7$	265.5	3.1	823.05
S_2	800.0	124000	$S_2B_8B_3B_1A_2$	179.0	205.3	36748.70
			$S_2B_3A_4$	134.1	171.6	23011.56
			$S_2B_8B_7B_6B_5B_4A_5$	186.9	111.0	20745.90
			$S_2B_8A_8$	300.0	71.2	21360.00
S_3	1000.0	155000	$S_3B_9B_8B_7B_6B_5B_4A_5A_4$	333.9	181.6	60636.24
			$S_3B_9B_8B_7B_6B_5B_4A_5$	2.1	121.0	254.10
			$S_3B_9A_9$	664.0	48.2	32004.80
S_4	0.0	0	无 Non	0.0	0.0	0.00
S_5	1015.0	157325	$S_5B_{11}B_{10}B_9B_8B_3B_2A_3$	508.0	225.2	114401.60
			$S_5B_{11}B_{10}B_9B_8B_7B_6B_5B_4A_5$	92.0	146.0	13432.00
			$S_5B_{11}A_{11}$	415.0	33.0	13695.00
S_6	1556.0	233400	$S_6B_{15}B_{13}B_{10}A_{10}$	351.0	62.0	21762.00
			$S_6B_{15}B_{13}B_{12}A_{12}$	86.0	45.0	3870.00
			$S_6B_{15}B_{13}A_{13}$	333.0	26.2	8724.60
			S_6A_{14}	621.0	11.0	6831.00
			$S_6B_{15}B_{16}A_{15}$	165.0	28.0	4620.00
S_7	0.0	0	无 Non	0.0	0.0	0.00
合计 Total	5171.0	797725		5171.0	1547.9	399731.55

表 4　从铺设端点到铺设地点的计划

Table 4　Plan of paving point to paving point

j	L_j (单位 Units)	R_j (单位 Units)	费用 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)	j (单位 Units)	L_j (单位 Units)	R_j (单位 Units)	费用 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)
1	0.0	0.0	0.0	9	505.0	159.0	14015.3
2	104.0	75.0	822.05	10	321.0	30.0	5197.05
3	226.0	282.0	6530.0	11	270.0	145.0	4696.25
4	468.0	0.0	10951.2	12	75.0	11.0	287.3
5	606.0	9.5	18366.3125	13	199.0	134.0	2877.85
6	184.5	15.5	1714.025	14	286.0	335.0	9701.05
7	189.5	76.0	2084.3125	15	165.0	0.0	1361.25
8	125.0	175.0	2312.5	合计 (Total)			80916.45

从结点运往铺设地点的方向数最多有 3个,分别用 $D1_j$,$D2_j$,$D3_j$ 表示从 A_j 运往 3个方向的运量,各方向的取法如下(其中的方向都是指在图 4中的方向):

(i) 如果结点 A_j 的度为 1,说明从该结点运出的方向只有一个,$D1_j$ 就是这个方向上的运量,并且令 $D2_j = 0, D3_j = 0$. 这样的结点有 $A_1, A_{15}, A_{16}, A_{18}, A_{21}$;

(ii) 如果结点 A_j 的度为 2,说明从该结点运出的方向有 2个,$D1_j$ 表示向左方向的运量,$D2_j$ 表示向右方向的运量,并且令 $D3_j = 0$.这样的结点有 $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{19}, A_{20}$.

(iii) 如果结点 A_j 的度为 3,则 $D1_j$ 表示向左方向的运量,$D2_j$ 表示向右方向的运量,$D3_j$ 表示向下的运量.这样的结点有 A_9, A_{11}, A_{17}.

用类似于前面建立模型的方法对问题三建立模型如下:

$$\min J = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} P_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} w_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{21} \frac{1}{2}\cdot e(D1_j^2 + D2_j^2 + D3_j^2).$$

S. T.

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} x_{ij} = 5\,903,$$

$$\sum_{j=1}^{21} x_{ij} \leqslant s_i, i = 1, 2, \cdots, 7,$$

$$\sum_{j=1}^{21} x_{ij}\left(\sum_{j=1}^{21} x_{ij} - 500\right) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, 7,$$

$$D1_j + D2_j + D3_j = \sum_{i=1}^{7} x_{ij}, j = 1, 2, \cdots, 21,$$

$$D2_j + D1_{j+1} = A_j A_{j+1}, j = 1, 2, \cdots, 14,$$

$$D3_9 + D1_{16} = 42, D3_{11} + D1_{17} = 10,$$

$$D2_{17} + D1_{18} = 130, D3_{17} + D1_{19} = 190,$$

$$D2_{19} + D1_{20} = 260, D2_{20} + D1_{21} = 100,$$

$$D1_1 = D2_{15} = D2_{16} = D3_{16} = D2_{18} = 0,$$

$$D3_{18} = D3_{19} = D3_{20} = D2_{21} = D3_{21} = 0,$$

$$D3_j = 0, j = 1, \cdots, 8, 10, 12, \cdots, 15.$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \cdots, 7, j = 1, \cdots, 21.$$

求解以上模型得到表 5 表 6的购买和运输计划.由此可知 $J_1 = 910\,515$, $J_2 = 412\,089.55$, $J_3 = \sum_{j=1}^{21} \frac{1}{2} e(D1_j^2 + D2_j^2 + D3_j^2) = 86\,087.15$,总费用 $J = J_1 + J_2 + J_3 = 1\,408\,691.7$.

7　模型评价

本文所讨论的问题用线性规划来求解是无法得到满意结果的,这主要是因为钢管从铺设端点运往铺设地点时的运费不与路长成线性关系,为此我们建立二次规划模型,为的是真实反映实际操作中的各种条件限制和费用,结果是合理可用的.虽然我们求解的只是一个特定的实际问题,但其中的方法具有一般性,容易推广到类似的问题中.如果只是运输路线图的不同,则只需修改相应数据就可以了.

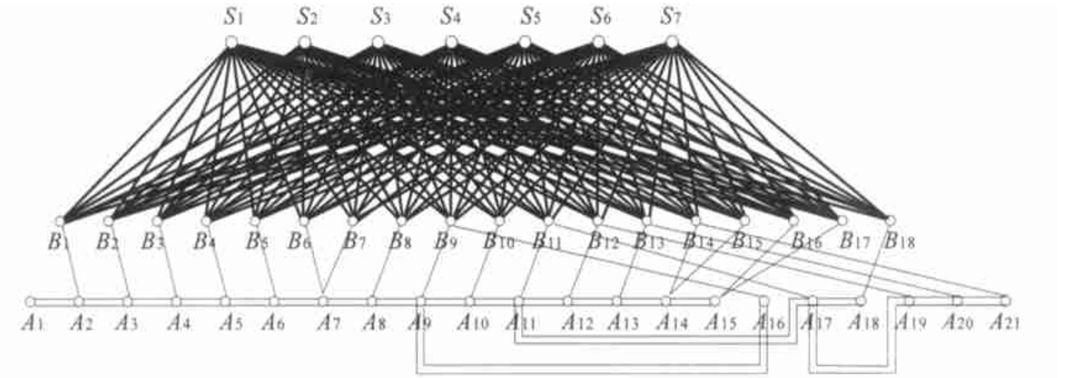

图 4　与图 2等效的简化图

Fig 4　Simplified fig. 2

表 5 在图 2中从钢厂购买钢管然后运到铺设端点的计划

Table 5 Plans on conveying of the steel tubes purchased from steel mill to paving point in fig. 2

钢厂 Steel mill	购买量 Purchase (单位 Units)	购买费用 Expenses (万元 Tenthousand yuan)	运输路径(在图 1中) Transport route (in fig 1)	运量 x_{ij} Quantites x_{ij} (单位 Units)	单价 Unit price (万元 Tenthousand yuan)	运费 Transport costs (万元 Tenthousand yuan)
S_1	800.0	128000	$S_1B_6B_5B_4A_5$	334.5	38.0	12711.00
			$S_1B_6B_5A_6$	200.0	20.5	4100.00
			$S_1B_7A_7$	265.5	3.1	823.05
S_2	800.0	124000	$S_2B_8B_3B_1A_2$	179.0	205.3	36748.70
			$S_2B_8B_3B_2A_3$	321.0	190.2	61054.20
			$S_2B_8A_8$	300.0	71.2	21360.00
S_3	1000.0	155000	$S_3B_9B_8B_3B_2A_3$	80.0	200.2	16016.00
			$S_3B_9B_8B_7B_6B_5B_4A_5$	214.0	121.0	25894.00
			$S_3B_9A_9$	664.0	48.2	32004.80
			S_3A_{16}	42.0	44.0	1848.00
S_4	0.0	0	无 Non	0.0	0.0	0.00
S_5	1613	249938	$S_5B_{11}B_{10}B_9B_8B_3B_2A_3$	107.0	225.2	24096.40
			$S_5B_{11}B_{10}B_9B_8B_7B_6B_5A_5A_4$	468.0	206.6	96688.80
			$S_5B_{11}B_{10}B_9B_8B_7B_6B_5A_5$	67.0	146.0	9782.00
			$S_5B_{11}B_{10}A_{10}$	351.0	57.0	20007.00
			$S_5B_{11}A_{11}$	415.0	33.0	13695.00
			S_5A_{17}	205.0	32.0	6560.00
S_6	1690.0	294000	$S_6B_{13}B_{18}B_{12}A_{12}$	86.0	45.0	3870.00
			$S_6B_{13}A_{13}$	333.0	16.2	5394.60
			S_6A_{14}	621.0	11.0	6831.00
			$S_6B_{15}B_{16}A_{15}$	165.0	28.0	4620.00
			$S_6B_{13}A_{18}$	65.0	37.0	2405.00
			$S_6B_{15}B_{13}B_{18}A_{19}$	70.0	44.0	3080.00
			S_6A_{20}	250.0	10.0	2500.00
			S_6A_{21}	100.0	0.0	0.00
S_7	0.0	0	无 Non	0.0	0.0	0.00
合计 Toltal	5903	910515		5903	1832.70	412089.55

表 6 从铺设端点到铺设地点的计划

Table 6 Plan of paving point to paving point

j	$D1_j$ (单位 Units)	$D2_j$ (单位 Units)	$D3_j$ (单位 Units)	费用 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)	j	$D1_j$ (单位 Units)	$D2_j$ (单位 Units)	$D3_j$ (单位 Units)	费用 Transport cost (万元 Tenthousand yuan)
1	0.0	0.0	0	0.0	12	75.0	11.0	0	287.3
2	104.0	75.0	0	822.05	13	199.0	34.0	0	2877.8
3	226.0	82.0	0	6530	14	86.0	335.0	0	9701.0
4	468.0	0.0	0	10951.2	15	165.0	0	0	1361.25
5	606.0	9.5	0	18366.312	16	42.0	0	0	88.2
6	184.5	15.5	0	1714.025	17	10.0	65.0	130.0	1061.25
7	189.5	76.0	0	2084.312	18	65.0	0	0	211.25
8	125.0	175.0	0	2312.5	19	60.0	10.0	0	185
9	505.0	159.0	0	14015.3	20	250.0	0	0	3125
10	321.0	30.0	0	5197.05	21	100.0	0	0	500
11	270.0	145.0	0	4696.25	合计 (Total)				86087.1

参考文献

1 张 莹.运筹学基础.北京:清华大学出版社,1999.52~53.

2 戴一奇,胡冠中,陈 卫.图论与代数结构.北京:清华大学出版社,1995.8.

3 胡运权.运筹学教程.北京:清华大学出版社,1998.238~239.

4 楼世博,金晓龙,李鸿祥.图论及其应用.北京:人民邮电出版社,1982.437~439.

(责任编辑:黎贞崇)