DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.03.001
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (3): 161~164, 168

半正规、C-正规对群超可解性的影响*

Influence of Semi-Normal Subgroups and C-Normal Subgroups on the Supersolvability of Groups

曾凡辉　　李世荣
Zeng Fanhui　Li Shirong

(广西大学数学与信息科学系　南宁市大学路 100号　530004)
(Dept. of Math.& Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　利用某些半正规或 C-正规子群刻划有限群的结构,得到有限群超可解的若干充分条件: 设有限群 $G=AB$,其中 $A\leqslant G,B\leqslant G$.若 A 与 B 的所有 Sylow 子群在 G 中半正规,则 G 超可解;设 G 是有限群,$N\trianglelefteq G$,G/N 超可解.若 N 的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 N 的所有 2^2 阶循环子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 是超可解群.同时推广了一些已知的结果.
关键词　半正规　C-正规　超可解　超可解嵌入子群　Sylow 基
中图法分类号　O152.1

Abstract　Using semi-normal subgroups and C-normal subgroups to characterize the structure of finite groups, some sufficient conditions for finite groups to be supersolvable of supposing finite groups $G=AB$, $A\leqslant G$, $B\leqslant G$ are obtained. And if all Sylow subgroups of A and B are semi-normality in G, then G is supersolvable; if G is finite group, then $N\trianglelefteq G$, G/N is supersolvable; if all prime subgroups of N include in $U(G)$, and all 2^2 steppes of circulation subgroup of N are semi-normality or C-normality in group G, then G is supersolvability. Some previously known results are extended.
Key words　semi-normality, C-normality, supersolvable, supersolvable embedding subgroups, sylow basis

设 $G=AB$,其中 $A,B\leqslant G$.利用子群 A,B 的某些特性研究群 G 的结构是人们感兴趣的课题.我们熟悉的 Wielandt定理[1]: 2个幂零群之积可解,即当 A,B 都幂零时,G 可解;又当 A,B 都是 G 的超可解正规子群且 $(|G:A|,|G:B|)=1$ 时,G 是超可解的[2];而当 A 与 B 为交换时,则 $G''=1$.特别地,G 是可解群[3].所以当 A 与 B 具有较好的性质的时候,我们可获得有限群较详细的结构.

文中用 A 与 B 的 Sylow 子群的半正规性来考查群 G 的结构,得到如下结果: 设有限群 $G=AB$,其中 $A\leqslant G,B\leqslant G$.若 A 与 B 的所有 Sylow 子群在 G 中半正规,则 G 超可解.另外,人们往往喜欢用群 G 的极小子群及 2^2 阶循环子群研究群的结构,如文献[4]中的定理: 设 G 之素数阶子群皆属于 $SE(G)$,G 之 2^2 阶循环子群在 G 中 C-正规,则 G 为超可解群.而本文将证明: 设 G 是有限群,$N\trianglelefteq G$,G/N 超可解.若 N 的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 N 的所有 2^2 阶循环子群在 G 中或半正规或 C-正规,则 G 为超可解群,其中 $U(G)$ 是在本文中定义的一个包含 $Z_\infty(G)$ 及 $SE(G)$ 的子群.从而文献[4]中的定理得到了推广.文中所考虑的群均指有限群,文中所用的符号都是标准的,可参阅文献[3].

2002-11-26收稿。
* 国家自然科学基金项目(编号 10161001)和广西自然科学基金项目资助。

1　定义及主要引理

定义 1[5]　群 G 的子群 A 叫做(在 G 中)半正规的,如果存在一个子群 B 使得 $AB=G$,且对 B 的任何真子群 B_1,AB_1 是 G 的真子群.这样的子群 B 叫做 A 在 G 中的 S-补,A 在 G 中的 S-补的集合记为 $S_G(A)$.

性质 1[5]　如果 A 是 G 的半正规子群,则对任意 $x\in G$,A^x 是 G 的半正规子群,并且 $S_G(A^x)=S_G(A)$.又若 $B\in S_G(A)$,则对任意的 $y\in G$,$B^y\in S_G(A)$.

性质 2[5]　设 A 是 G 的半正规子群,则

(1) 如果 $A\leqslant H\leqslant G$,那么 A 是 H 的半正规子群;

(2) 如果 $N\trianglelefteq G$,$N\leqslant A$,那么 A/N 是 G/N 的半正规子群,并且如果 $B\in S_G(A)$,那么 $BN/N\in$

$S_{G/N}(A/N)$;

(3) 如果 $N \trianglelefteq G$,则 AN 是 G的半正规子群;

(4) 如果 $N \trianglelefteq G$,那么 AN/N 是 G/N的半正规子群. 于是对 G的任意同态 θ, A^{θ} 是 G^{θ} 的半正规子群.

引理 1[5] 设群 G的 p-子群 P是半正规的,则 P与 G的每个 q-子群 Q可交换, $q \neq p$.

引理 2[6] 如果群 G的每个 Sylow 子群在 G中半正规,则 G超可解.

定义 2[7] 设 $H \leqslant G$,称 H为 G的 C-正规子群,若存在 $K \trianglelefteq G$使得 $G = HK$且 $H \cap K \leqslant \mathrm{Core}_G(H)$.

性质 3[7,8] (1) 若 H在 G中 C-正规, $H \leqslant K \leqslant G$,则 H在 K中 C-正规;

(2) 设 $N \trianglelefteq G$, $N \leqslant H$,那么 H在 G中 C-正规当且仅当 H/N 在 G/N 中 C-正规.

(3) 设 $N \trianglelefteq G$, $H \leqslant G$且 $(|N|, |H|) = 1$. 如果 H在 G中 C-正规,则 HN/N 在 G/N 中 C-正规.

引理 3[2] $Z_{\infty}(G) = \cap\ \{N | N \trianglelefteq G$且 $Z(G/N) = 1\}$.

引理 4 设 $N \trianglelefteq G$, 则 $Z_{\infty}(G/N) \geqslant Z_{\infty}(G)N/N$.

证 $Z_{\infty}(G/N) =$

$\cap\ \{A/N \trianglelefteq G/N | Z((G/N)/(A/N)) = 1\} =$

$\cap\ \{A \trianglelefteq G | Z(G/A) = 1, A \geqslant N\}/N \geqslant \cap\ \{A \trianglelefteq G | Z(G/A) = 1\}N/N = Z_{\infty}(G)N/N$.

特别地,若 $N = Z(G)$, 则 $Z_{\infty}(G/Z(G)) = Z_{\infty}(G)/Z(G)$.

引理 5 设 G是有限群, A是 G的超可解子群,则 $Z_{\infty}(G)A$超可解.

证 若 $Z(G) = 1$,则 $Z_{\infty}(G) = 1$,此时命题显然已成立. 故设 $Z(G) \neq 1$,考虑 $\bar{G} = G/Z(G)$,则 $Z_{\infty}(\bar{G}) = Z_{\infty}(G/Z(G)) = Z_{\infty}(G)/Z(G)$. 由归纳法, $Z_{\infty}(\bar{G})\bar{A}$超可解,即 $Z_{\infty}(G)/Z(G) \cdot AZ(G)/Z(G)$超可解,从而 $Z_{\infty}(G)A/Z(G)$超可解,所以 $Z_{\infty}(G)A$超可解.

定义 3 设 G为有限群,设 $u(G) = \{N | N \trianglelefteq G, NX$超可解, $\forall X \leqslant G$且 X超可解$\}$. 显然有 $U(G) \neq \emptyset$. 令 $U(G) = \langle N | N \in u(G) \rangle$,则 $U(G)$ char G.

事实上,设 $N \in u(G)$, $X \leqslant G$且 X超可解, $T \in \mathrm{Aut}(G)$,则 $N^{T}X = (NX^{T^{-1}})^{T}$. 显然, $NX^{T^{-1}}$超可解,故 $(NX^{T^{-1}})^{T}$超可解,从而 $N^{T}X$超可解,即 $N^{T} \in u(G)$,所以 $N \leqslant U(G)$,由 N在 $U(G)$中的任意性得, $U(G)^{T} \leqslant U(G)$,故 $U(G)$ char G.

显然 $U(G)$是 $u(G)$的极大元且 $U(G)$超可解, $U(G)$包含于任一极大超可解子群中. 由引理 5,还有 $Z_{\infty}(G) \leqslant U(G)$.

引理 6 设 G为有限群, $H \leqslant G$,则 $U(G) \cap H \leqslant U(H)$.

证 设 A为 H的超可解子群. 因 $(U(G) \cap H)A = U(G)A \cap H$且 $U(G) \cap H \trianglelefteq H$,而 $U(G)A$为 G的超可解子群,故 $U(G)A \cap H$为 H的超可解子群,即 $(U(G) \cap H)A$超可解,所以 $U(G) \cap H \leqslant U(H)$.

定义 4[3] 设 $H \trianglelefteq G$. H叫做 G的超可解嵌入子群,如果包含在 H中的每个 G-主因子都是循环的.

引理 7[3] 用 $SE(G)$表示 G的所有超可解嵌入子群之积,则 $SE(G)$仍是 G的超可解嵌入子群.

引理 8 设 G为有限群,则 $SE(G) \leqslant U(G)$.

证 设 X为 G的超可解子群,往证 $SE(G)X$超可解. 记 $\bar{X} = SE(G)X/SE(G)$,则 $\bar{X}$超可解,故 $\bar{X}$有一正规群列

$\bar{1} = \bar{M}_0 \leqslant \bar{M}_1 \leqslant \cdots \leqslant \bar{M}_m = \bar{X}$,

使所有的商群 $\bar{M}_i/\bar{M}_{i-1}$循环,其中 $\bar{M}_{i-1} = M_{i-1}/SE(G)$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

由 $SE(G)$的定义,存在 G-不变群列

$1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_n = SE(G)$,

使得所有的商因子 S_j/S_{j-1} $(j = 1, 2, \cdots, n)$循环.

显然

$1 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant S_n = SE(G) = M_0 \leqslant M_1 \leqslant \cdots \leqslant M_m = SE(G)X$

为 $SE(G)X$的正规群列且所有的商因子循环,所以 $SE(G)X$超可解,即有 $SE(G) \leqslant U(G)$.

引理 9 设 G是有限群,则 G是超可解群当且仅当 $G/U(G)$超可解.

证 只需证 $G/U(G)$超可解时, G超可解.

假设命题不真,设 G为极小阶反例.

(1) 条件对子群遗传, G内超可解.

设 $H < G$,由 $G/U(G)$超可解,知 $U(G)H/U(G)$超可解,而 $U(G)H/U(G) \cong H/(H \cap U(G))$,故 $H/(H \cap U(G))$超可解. 由引理 6,有 $U(G) \cap H \leqslant U(H)$,故 $H/U(H) \cong (H/(H \cap U(G)))/(U(H)/(H \cap U(G)))$超可解,由 G的选取得, H超可解.

(2) 矛盾的导出.

$\forall M < G$,则 M是超可解的. 若 $U(G) \not\leqslant M$,则 $G = U(G)M$超可解,矛盾,故 $U(G) \leqslant M$,由 M的任意性有, $U(G) \leqslant \Phi(G)$. 又因 $G/\Phi(G) \cong (G/U(G))/(\Phi(G)/U(G))$,而 $G/U(G)$超可解,所以 $G/\Phi(G)$超可解,于是 G超可解,矛盾. 命题成立.

引理 10[9] 设 G是内超可解群,则 G有如下结构:

(1) G恰含有一个正规 Sylow p-子群 P,且有 $M < G$使 $G = P \rtimes M$, M超可解;

(2) $P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的极小正规子群;

(3) 若 $p>2$,则 $\exp P=p$;若 $p=2$,则 $\exp P\leqslant 4$且 $p^2\mid |G|$;

(4) 存在 $c\in P\backslash\Phi(P)$,使 $\langle c\rangle \ntrianglelefteq G$;

(5) $P/\Phi(P)$非循环.

引理 **11**[4] 设 G为内超可解群,P为 G的正规 Sylow p-子群.若有 $N\trianglelefteq G$使 G/N超可解,则 $P\in Syl_p(N)$.

引理 **12** 设 G为内超可解群,P为 G的正规 Sylow p-子群,$x\in P$,若 $\langle x\rangle$ 在 G中 C-正规,则 $x\in \Phi(P)$.

证 P满足引理 10的条件.

假设命题不真,则有 $x\in P\backslash\Phi(P)$使 $\langle x\rangle$ 在 G中 C-正规,即有 $K\trianglelefteq G$使 $G=\langle x\rangle K$,且 $\langle x\rangle\cap K\leqslant Core_G(\langle x\rangle)$.令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\trianglelefteq G$.若 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap\langle x\rangle K=\langle x\rangle(P\cap K)=\langle x\rangle$,与引理 10矛盾,故 $P_1\nleq\Phi(P)$.于是 $1\neq P_1\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,由 $P/\Phi(P)$的极小正规性及 $P_1\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$得,$P=P_1\Phi(P)$,即 $P_1=P$,故 $P=P\cap K$,所以 $P\leqslant K$.于是 $\langle x\rangle=\langle x\rangle\cap K\leqslant Core_G(\langle x\rangle)$,即有 $\langle x\rangle=Core_G(\langle x\rangle)$,所以 $\langle x\rangle\trianglelefteq G$.这样,$1\neq\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,由 $P/\Phi(P)$的极小正规性及 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$得,$P/\Phi(P)=\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)$,所以 $P=\langle x\rangle\Phi(P)$,即 $P=\langle x\rangle$,与引理 10矛盾.命题为真.

引理 **13**[3] 设 p是 $|G|$ 的最小素因子,$P\in Syl_p(G)$且 P循环,则 G有正规 p-补.

引理 **14**[3] 设 G是有限群且 $\Phi(G)=1$,则 $F(G)$是交换群且

$F(G)=\langle N\mid N$是 G的可解极小正规子群$\rangle$.

引理 **15** 若有限群 $G=AB$,其中 $A\leqslant G$,$B\leqslant G$,则有 $P\in Syl_p(G)$,$P_1\in Syl_p(A)$,$P_2\in Syl_p(B)$,使 $P=P_1P_2$.

证 取 $P_1\in Syl_p(A)$,$P\in Syl_p(G)$使 $P_1\leqslant P$.令 $P_2\in Syl_p(B)$,则有 $x\in G$使 $P_2\leqslant P^x$.由于 $G=AB$,故存在 $a\in A$,$b\in B$使 $x=ab$,所以 $P_2\leqslant P^{ab}$,即 $P_2^{b^{-1}}\leqslant P^a$.而由于 $P_1\leqslant P$,故 $P_1^a\leqslant P^a$.显然 $P^a\in Syl_p(G)$,$P_1^a\in Syl_p(A)$,$P_2^{b^{-1}}\in Syl_p(B)$.用 P,P_1,P_2分别代替 $P^a,P_1^a,P_2^{b^{-1}}$,则有 $P_1\leqslant P$,$P_2\leqslant P$,故 $P_1P_2\subseteq P$.因 $G=AB$,所以

$$|P|=|G|_p=\frac{|A|_p\cdot|B|_p}{|A\cap B|_p}=\frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|A\cap B|_p}.$$

由于 $P_1\cap P_2\leqslant A\cap B$,故 $|P_1\cap P_2|=|P_1\cap P_2|_p\leqslant|A\cap B|_p$,所以

$$|P_1P_2|=\frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|P_1\cap P_2|}\geqslant\frac{|P_1|\cdot|P_2|}{|A\cap B|_p}=|P|,$$

故 $|P|=|P_1P_2|$,即 $P=P_1P_2$.

引理 **16** 设 A,B,C是群 G的子集,则 $ABC=A(BC)$.

证 设 $x\in ABC$,则 $x=abc=a(bc)\in A(BC)$,其中 $a\in A$,$b\in B$,$c\in C$,所以 $ABC\subseteq A(BC)$.反之,若 $x\in A(BC)$,则存在 $a\in A$,$y\in BC$使 $x=ay$,而 $y=bc$,$b\in B$,$c\in C$,所以 $x=ay=a(bc)=abc\in ABC$,所以 $A(BC)\subseteq ABC$,所以 $ABC=A(BC)$.

2 主要结果

定理 **1** 设有限群 $G=AB$,其中 $A\leqslant G$,$B\leqslant G$.若 A与 B的所有 Sylow子群在 G中半正规,则 G超可解.

证 假设命题不真,设 G为极小阶反例.

(1) 条件对商群遗传.

设 $N\trianglelefteq G$,显然 $G/N=AN/N\cdot BN/N$.$\forall r\mid|AN/N|$,则 $r\mid|A|$.设 $T\in Syl_r(A)$,则 $TN/N\in Syl_r(AN/N)$,由于 T在 G中半正规.故由半正规的性质有,TN/N在 G/N中半正规.所以 AN/N的每个 Sylow子群在 G/N中半正规.同理有 BN/N的每个 Sylow子群在 G/N中半正规,即 G/N满足定理假设的条件.

(2) G具有 Sylow塔,G可解.

由半正规的性质及引理 2知,A,B都是超可解的.设 p为 $|G|$ 的最大素因子,$P_1\in Syl_p(A)$,$P_2\in Syl_p(B)$.因 A与 B都是超可解群,故 $P_1\trianglelefteq A$,$P_2\trianglelefteq B$,即 P_1,P_2分别为 A与 B的唯一 Sylow p-子群.由引理 15,存在 $P\in Syl_p(G)$使 $P=P_1P_2$.由于 A可解,故 A有 p'-Hall子群,设其为 A_1,则 $A=P_1A_1$.设$\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$为 A_1的一组 Sylow基,$Q_i\in Syl_{q_i}(A_1)$,$q_i\neq p$,$i=1,2,\cdots,n$,则 $A_1=Q_1Q_2\cdots Q_n$.同理可设 B_1为 B的 p'-Hall子群,则 $B=P_2B_1$,$B_1=R_1R_2,\cdots,R_s$,其中$\{R_1,R_2,\cdots,R_s\}$ 为 B_1 的一组 Sylow 基,$R_j\in Syl_{r_j}(B_1)$,$r_j\neq p$,$j=1,2,\cdots,s$.

由于 P_1在 G中半正规,由引理 1,P_1与每一 R_j可交换,故 P_1与 B_1可交换,即 $P_1B_1\leqslant G$,则 P_1B_1是超可解的.事实上,因 B_1是 P_1B_1的 p'-Hall子群,它的 Sylow子群在 P_1B_1中半正规,而 P_1在 P_1B_1中是半正规的,故 P_1B_1的所有 Sylow子群在 P_1B_1中半正规,由引理 2知,P_1B_1是超可解的.于是 $P_1\trianglelefteq P_1B_1$,即 $B_1\leqslant N_G(P_1)$.同理有 $P_2\trianglelefteq P_2A_1$,$A_1\leqslant N_G(P_2)$.由于 $G=AB=A_1P_1B_1P_2$.由引理 16,$G=A_1(B_1P_1P_2)=A_1(B_1(P_1P_2))=A_1(B_1P)=A_1B_1P$.又 $P_1\trianglelefteq A$,故 $A\leqslant N_G(P_1)$,而 $A\leqslant N_G(P_2)$,故 $A\leqslant N_G(P_1P_2)=$

$N_G(P)$,同理有 $B_1\leqslant N_G(P)$,又因 $P\leqslant N_G(P)$,所以 $G=A_1B_1P\leqslant N_G(P)$,即 $G=N_G(P)$,所以 $P\trianglelefteq G$.考虑 G/P,由(1),条件对 G/P 遗传.由归纳,G/P 有 Sylow塔,故 G有 Sylow塔,所以 G可解.

(3) G有唯一极小正规子群 N 且 $F(G)=N=P\in \mathrm{Syl}_p(G)$.

设 N是 G的极小正规子群.由(1),条件对 G/N 遗传,由 G的选取得,G/N 超可解.若 G还有另一个极小正规子群 N^*,则同理可得 G/N^* 超可解,故 $G/(N\cap N^*)$ 超可解.又因 $N\cap N^*=1$,所以 G超可解,矛盾.所以 N 是 G的唯一极小正规子群.若 $\Phi(G)\neq 1$,则由(1)得 $G/\Phi(G)$ 超可解,从而 G超可解,矛盾,故 $\Phi(G)=1$.由引理 14得,$F(G)=N$.而由(2)即有 $P\leqslant F(G)=N$,由 N的唯一极小正规性得,$N=P$,即 P是初等交换 p-群.

(4)矛盾的导出.

设 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$,由(3),P是交换的且是 G的唯一极小正规子群.设 $1\neq x\in P$,则每一 Q_i 与 $\langle x\rangle$ 可交换,故 A_1与 $\langle x\rangle$ 可交换,即 $\langle x\rangle A_1\leqslant G$.所以 $\langle x\rangle=\langle x\rangle(A_1\cap P)=\langle x\rangle A_1\cap P\trianglelefteq \langle x\rangle A_1$,即有 $A_1\leqslant N_G(\langle x\rangle)$.同理有 $B_1\leqslant N_G(\langle x\rangle)$.由于 P 交换,故 $P\leqslant N_G(\langle x\rangle)$,所以 $G=A_1B_1P\leqslant N_G(\langle x\rangle)$,即 $G=N_G(\langle x\rangle)$,所以 $\langle x\rangle\trianglelefteq G$.由 P的唯一极小正规性,有 $P=\langle x\rangle$,所以由 $G/P=G/\langle x\rangle$ 超可解,得 G超可解,矛盾.

极小阶反例不存在,G超可解.

定理 2 设 G是有限群,$N\trianglelefteq G$,G/N超可解.若 N的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 N的所有 2^2阶循环子群在 G中或半正规或 C-正规,则 G是超可解群.

证 假设定理不成立,设 G为极小阶反例.

(1)条件对子群遗传,G为内超可解群.

事实上,$\forall K\lt G$,由 G/N超可解,得 KN/N超可解.因 $KN/N\cong K/(K\cap N)$,故 $K/(K\cap N)$超可解.$K\cap N$之素数阶子群包含在 $U(G)\cap K$中.由引理 6有,$U(G)\cap K\leqslant U(K)$,故 $K\cap N$之素数阶子群包含于 $U(K)$.又由半正规与 C-正规的性质知,$K\cap N$之 2^2阶循环子群在 K中或半正规或 C-正规,故 K,$K\cap N$满足条件,由归纳,K超可解,故 G是内超可解的.于是可设 $G=P\rtimes M$,P,M的性质同引理 10.

(2)由引理 11,$P\leqslant N$,所以 P的所有素数阶子群含于 $U(G)$且 P的所有 2^2阶循环子群在 G中或半正规或 C-正规.

(3) $p=2$,P非循环.

若不然,则 $p\gt 2$,由引理 10知,$\exp P=p$,从而 P的每一非单位元素都为 p阶的,依题意有,$P\leqslant U(G)$.又 $G/P\cong M$超可解,于是 $G/U(G)\cong(G/P)/(U(G)/P)$超可解,由引理 9得,$G$超可解,矛盾.$P$非循环是显然的.

(4) $\forall x\in P\backslash\Phi(P)$,有 $o(x)=4$.

若否,则存在 $a\in P\backslash\Phi(P)$使 $o(a)=2$.令 $A=\langle a\rangle^G$,则 $A\trianglelefteq G$且 $A\leqslant P$,于是 $\bar{1}\neq A\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq G/\Phi(P)$,由 $A\Phi(P)/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$及 $P/\Phi(P)$的极小正规性得,$A\Phi(P)/\Phi(P)=P/\Phi(P)$,即 $P=A\Phi(P)=A$.$\forall g\in G$,则 a^g为 2阶元.依题意,$a^g\in U(G)$,从而 $P=A\leqslant U(G)$.由 $G/P\cong M$超可解知 $G/U(G)$超可解.由引理 9可得 G超可解,矛盾.

(5)矛盾的导出.

由(4)及定理的假设知 $\forall x\in P\backslash\Phi(P)$,$\langle x\rangle$在 G中半正规或 C-正规,由引理 12知 $\langle x\rangle$只能在 G中半正规,即有 $B\in S_G(\langle x\rangle)$使 $G=\langle x\rangle B$.由 G可解,故 G有 p'-Hall子群且所有的 p'-Hall子群共轭.而 B的 p'-Hall子群显然是 G的 p'-Hall子群.故存在 $x\in G$使 $M^x\leqslant B$.由性质 1可设 $M\leqslant B$.由于 P非循环,故 $\langle x\rangle\lt P$,即有 $M\lt B$,于是 $\langle x\rangle M\lt G$,故 $\langle x\rangle=\langle x\rangle(M\cap P)=\langle x\rangle M\cap P\trianglelefteq \langle x\rangle M$,所以 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq \langle x\rangle M\Phi(P)/\Phi(P)$.因 $P/\Phi(P)$是交换的,故 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq P/\Phi(P)$,所以 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\trianglelefteq MP/\Phi(P)=G/\Phi(P)$,而 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)\neq\bar{1}$.由 $P/\Phi(P)$的唯一极小正规性得 $\langle x\rangle\Phi(P)/\Phi(P)=P/\Phi(P)$,即有 $P=\langle x\rangle$,矛盾.

极小阶反例不存在,命题成立.

推论 1 设 G是有限群,若 G的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 G的所有 2^2阶循环子群在 G中或半正规或 C-正规,则 G是超可解群.

推论 2 设 G是有限群,$N\trianglelefteq G$,G/N超可解,若 N的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 N的所有 2^2阶循环子群在 G中半正规,则 G是超可解群.

推论 3 设 G是有限群,若 G的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 G的所有 2^2阶循环子群在 G中半正规,则 G是超可解群.

推论 4 设 G是有限群,$N\trianglelefteq G$,G/N超可解,若 N的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 N的所有 2^2阶循环子群在 G中 C-正规,则 G是超可解群.

推论 5 设 G是有限群,若 G的所有素数阶子群含于 $U(G)$,且 G的所有 2^2阶循环子群在 G中 C-正规,则 G是超可解群.

(下转第 168页 Continue on page 168)

$1)n_2) = \dfrac{k^2 + k - kn_2}{2}$,由 $t(C_4) \geqslant 0$,得到 $n_2 \leqslant k + 1$,由 $t = \dfrac{kn_2 - k - 1}{k - 1}$是正整数,得到 $n_2 \geqslant 2$且 $k - 1$整除 $k(n_2 - 2)$,而 $k - 1$与 k互素,则 $k - 1$整除 $n_2 - 2$,因此 $n_2 = 2$或者 $n_2 = k + 1$.

当 $n_2 = 2$时,$n_1 = k$,则 G是 $K_{k,2}$.

当 $n_2 = k + 1$时,$n_1 = \dfrac{k(k+1)}{2}$且 $t(C_4) = 0$,显然 G是 $S(K_{k+1})$.

反之,由引理 1及引理 7得,$P_{K_{k,2}}(x) = x^k(x^2 - 2k)$,$P_{L(K_{k,2})}(x) = x^{k-1}(x+2)^{k-1}(x-k+2)(x-k)$,即 $L(K_{k,2})$是整谱图.又因为

$P_{K_{k+1}}(x) = (x+1)^k(x-k)$,

由引理 8及引理 7得,

$P_{S(K_{k+1})}(x) = x^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x^2 - 2k)(x^2 - k + 1)^k$,

$P_{L(S(K_{k+1}))}(x) = x^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x+2)^{1+\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x+1)^k(x-k+1)^k(x-k)$.定理证毕.

如果线图 $L(G)$是正则图,则 G或为正则图或为二部半正则图.又当 G是 n阶 r正则图时,$P_{L(G)}(x) = (x+2)^{\frac{1}{2}nr-n}P_G(x-r+2)$,因此,$L(G)$是整谱图当且仅当 G是整谱图.由定理 2即可得

推论 3 (1)恰好有 3个连通的 3正则整谱线图:$L(K_{1,4})$,$L(K_{2,3})$及 $L(S(K_4))$.

(2)恰好有 16个连通的 4正则整谱线图:$L(K_{1,5})$,$L(K_{2,4})$,$L(S(K_5))$及 13个连通的 3正则整谱图的线图.

最后,我们提出一个有待研究的问题:给出所有的 5正则整谱线图.

参考文献

1 Cvetkovic D, Doob M, Sach H. Spectra of Graphs. The Mac-millan Press, 1993.

2 Cvetkovic D, Doob M, Sach H et al.. Recent Results in the Theory of Graph Spectra. Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1988.

3 Wang Ligong, Li Xueliang, Zhang Shenggui. Construction of integral graphs. Appl Math J Chinese Univ, Ser B, 2000, 15(3): 239~246.

4 Allen J. Schwenk. Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra. In: Theory and Applications of Graphs (Proc. Kalamazoo, 1976, ed. Y. Alavi, D. Lick). Springer-verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978. 516~533.

5 Cvetkovic D, Simic S, Stevanovic D. 4-regular integral graphs. Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat, 1998, (9): 89~102.

6 Harary F, Schwenk A J. Which graphs have integral spectra. In: Bari R, Harary F, eds. Springer Lecture Notes. 1974, (406): 45~51.

7 张德龙,谭尚旺.二部半正则图的谱.广西工学院学报,2001,12(1): 1~5.

8 柳柏濂.组合矩阵论.北京:科学出版社,1996.

(责任编辑:邓大玉 曾蔚茹)

(上接第 164页 Continue from page 164)

参考文献

1 贝.胡佩特[德].有限群论(中译本第一卷).福州:福建人民出版社,1992.

2 张远达.有限群构造(上,下).北京:科学出版社,1982.

3 徐明曜等.有限群导引(上,下).北京:科学出版社,1999.

4 王品超,温凤桐,李文祥.有限群的 C-正规子群.曲阜师范大学学报,1997,23(4): 5~7.

5 苏向盈.有限群的半正规子群.数学杂志,1988,8(1): 5~9.

6 王品超.超可解群的若干充分条件.数学学报,1990,33(4): 480~484.

7 Wang Y. C-Normality of groups and its properties. J of Algebra, 1996, 180: 954~965.

8 王燕鸣.极小子群对有限群结构的影响.数学学报,2001,44(2): 197~200.

9 陈重穆.内外$\sum$群与极小非$\sum$群.重庆:西南师范大学出版社,1988.

(责任编辑:黎贞崇)