DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.03.002
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (3): 165~ 168

几类整谱图*

On Some Classes of Integral Graphs

张德龙　　周红卫
Zhang Delong　Zhou Hongwei

(广西工学院信息与计算科学系　柳州市东环路 268号　545006)
(Department of Information and Computer Science, Guangxi University of Technology, 268 Donghuanlu, Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要　研究二部半正则图的补图、二部补图的特征多项式公式,给出几个特殊图类的谱,得到几类整谱图的充要条件及一些新的整谱图类.

关键词　二部半正则图　整谱图　线图
中图法分类号　O157.5

Abstract　Based on the study of the bipartite semiregular graph and characteristic multinomial formula of bipartite graph, the necessary and sufficient conditions for some classes of integral graphs are obtained, and some special graphs are given. Some new integral graphs are also given.

Key words　bipartite semiregular graph, integral graph, line graph.

求一般图的谱问题是非常困难的,因此对一些特殊图类的谱的计算也很不容易.目前对于特殊图类谱的研究主要获得了 12种特殊图类的谱[1].图的特征值都是整数,称为整谱图.对整谱图的研究主要集中在整谱树.已经得到的整谱图类见文献[1~ 6].本文通过对二部半正则图的补图、二部补图的特征多项式公式的研究,给出几个特殊图类的谱,并得到几类整谱图的充要条件及一些新的整谱图类.

设 $G=(X,Y,E)$ 为二部图,其中 $|X|=n_1$, $|Y|=n_2$, X 中顶点的度为 r_1, Y 中顶点的度为 r_2,则称 G 是参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2) 的二部半正则图, G 的阶数 $n=n_1+n_2$,边数 $m=n_1r_1=n_2r_2$.设 G 与 G^* 是顶点相同的二部图,若 $G\cup G^*$ 是完全二部图,则称 G^* 是 G 的二部补图.用 $\overline{G}$ 表示 G 的补图, kG 表示 k 个图 G 的直和, $K_{a,b}$ 表示完全二部图, $L(G)$ 表示 G 的线图, $A(G)$ 表示图的邻接矩阵, $P(G,x)=|xI-A(G)|$ 表示图 G 的特征多项式, J 表示元素全为 1的矩阵.

引理 **1**[1]　$P(K_{a,b},x)=x^{a+b-2}(x^2-ab)$.

引理 **2**[2]　图 G 中长为 k 的途径数目为 N_k,其中 $N_0=n$, $H_G(t)=\sum_{k=0}^{\infty}N_kt^k$ 是 N_k 的生成函数,则

$$H_G(t)=\frac{1}{t}\left((-1)^n\frac{P_{\overline{G}}\left(-\frac{t+1}{t}\right)}{P_G\left(\frac{1}{t}\right)}-1\right).$$

文献[7]给出了二部半正则图的补图的特征多项式公式,下面给出一个简化证明.

引理 **3**　图是参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2) 的二部半正则图,则其补图 $\overline{G}$ 的特征多项式为

$$P(\overline{G},x)=(-1)^n\cdot P(G,-x-1)\cdot\frac{(x+1)^2-(n_1+n_2)(x+1)+n_1r_1+n_2r_2-r_1r_2}{(x+1)^2-r_1r_2}.$$

证明　设参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2) 的二部半正则图 G 中长为 k 的途径数目为 N_k.当 k 为偶数时,以 G 中任意点为起点的长为 k 的途径数为 $r_1^{\frac{k}{2}}r_2^{\frac{k}{2}}$;当 k 为奇数时,以 G 中第一部分的任意点为起点的长为 k 的途径数为 $r_1^{\frac{k+1}{2}}r_2^{\frac{k-1}{2}}$,以 G 中第二部分的任意点为起点的长为 k 的途径数为 $r_1^{\frac{k-1}{2}}r_2^{\frac{k+1}{2}}$.因此有

$$N_k=\begin{cases}(n_1+n_2)(\sqrt{r_1r_2})^k, & \text{当 } k \text{ 为偶数时},\\ \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}n_1+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}n_2\right)(\sqrt{r_1r_2})^k, & \text{当 } k \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

由引理 2得

$$H_G(t)=\sum_{k=0,k\text{为偶数}}^{\infty}(n_1+n_2)(\sqrt{r_1r_2})^kt^k+$$

2003-03-31收稿.
* 广西自然科学基金资助课题(桂科自 0131001).

$$\sum_{k=1, k\text{为奇数}}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}n_1+\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}n_2\right)(\sqrt{r_1r_2})^k t^k=$$

$$\frac{1}{1-r_1r_2t^2}(n_1+n_2+r_1n_1t+r_2n_2t),$$

其中 $|t|<\frac{1}{\sqrt{r_1r_2}}$,

则 $P_{\bar G}\left(-\frac{t+1}{t}\right)=(-1)^n\left(1+\frac{t}{1-r_1r_2t^2}(n_1+n_2+r_1n_1t+r_2n_2t)\right)P_G(t)$,取 $t=-\frac{1}{x+1}$,则引理得证.

引理 4 图 G 是参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2) 的二部半正则图,则其二部补图 G^* 的特征多项式为

$$P(G^*,x)=\frac{x^2-n_1n_2+n_1r_1+n_2r_2-r_1r_2}{x^2-r_1r_2}P(G,x).$$

证明 设 $A(G)=\begin{pmatrix} O_{n_1} & B^T_{n_1\times n_2} \\ B_{n_2\times n_1} & O_{n_2}\end{pmatrix}$,因为当 M, Q 为方阵且 M 非奇异时 $\begin{vmatrix} M & N \\ P & Q\end{vmatrix}=|M||Q-PM^{-1}N|$ (见文献[1]),所以

$$P(G,x)=\begin{vmatrix} xI_{n_1} & -B^T \\ -B & xI_{n_2}\end{vmatrix}=|xI_{n_1}|\left|\frac{1}{x}(x^2I_{n_2}-BB^T)\right|=x^{n_1-n_2}|x^2I_{n_2}-BB^T|;$$

因为 B 的行和为 r_2,所以

$$P(G^*,x)=\begin{vmatrix} xI_{n_1} & -J_{n_1\times n_2}+B^T \\ -J_{n_2\times n_1}+B & xI_{n_2}\end{vmatrix}=|xI_{n_1}|\left|xI_{n_2}-(-J_{n_2\times n_1}+B)\frac{1}{x}I_{n_1}(-J_{n_1\times n_2}+B^T)\right|=x^{n_1-n_2}|(2r_2-n_1)J_{n_2}+x^2I_{n_2}-BB^T|.$$

容易证明当 n 阶方阵 P 的行和为常数 $c(\neq 0)$ 时,$|kJ+P|=(1+\frac{nk}{c})|P|$.因为 $x^2I_{n_2}-BB^T$ 的行和为 $x^2-r_1r_2$,所以

$$P(G^*,x)=x^{n_1-n_2}\left(1+\frac{n_2(2r_2-n_1)}{x^2-r_1r_2}\right)|x^2I_{n_2}-BB^T|=\frac{x^2-n_1n_2+2n_2r_2-r_1r_2}{x^2-r_1r_2}P(G,x)=\frac{x^2-n_1n_2+n_1r_1+n_2r_2-r_1r_2}{x^2-r_1r_2}P(G,x).$$

设 $G_0(m,a,b)=mK_{a,b}$,$G_1(m,a,b)=\overline{G_0(m,a,b)}$,$G_2(m,a,b)=G_0^*(m,a,b)$,$G_3(m,a,b)=\overline{G_2(m,a,b)}$,其中 $m\geqslant 3$,则有

定理 1 (1) $G_1(m,a,b)$ 是整谱图当且仅当 $\sqrt{ab}$ 和 $\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(2m-1)}$ 都是整数;

(2) $G_2(m,a,b)$ 是整谱图当且仅当 $\sqrt{ab}$ 是整数;

(3) $G_3(m,a,b)$ 是整谱图当且仅当 $\sqrt{ab}$ 和 $\sqrt{m^2(a-b)^2+4ab}$ 都是整数.

证明 (1) $G_0(m,a,b)$ 是参数为 (am,bm,b,a) 的二部半正则图.由引理 1 得,$P(G_0(m,a,b),x)=x^{m(a+b-2)}(x^2-ab)^m$,由引理 3 得,$P(G_1(m,a,b),x)=(x+1)^{m(a+b-2)}((x+1)^2-ab)^{m-1}((x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(2m-1))$,$G_1(m,a,b)$ 是整谱图当且仅当 $\sqrt{ab}$ 是整数且方程 $(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(2m-1)=0$ 的根都为整数.

方程

$$(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(2m-1)=0$$

的根为

$$x_{1,2}=-1+\left(m(a+b)\pm\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(2m-1)}\right)/2.$$

当 $\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(2m-1)}$ 是整数时,容易证明 $m(a+b)$ 与 $\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(2m-1)}$ 的奇偶性相同.因此,方程 $(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(2m-1)=0$ 的根都为整数当且仅当 $\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(2m-1)}$ 是整数.

(2) 由引理 4 得 $P(G_2(m,a,b),x)=x^{m(a+b-2)}(x^2-ab)^{m-1}(x^2-ab(m-1)^2)$.

(3) 因为 $G_2(m,a,b)$ 是参数为 $(am,bm,b(m-1),a(m-1))$ 的二部半正则图.

由引理 3 及 $P(G_2(m,a,b),x)$ 得 $P(G_3(m,a,b),x)=x^{m(a+b-2)}((x+1)^2-ab)^{m-1}((x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(m^2-1))$,$G_3(m,a,b)$ 是整谱图当且仅当 $\sqrt{ab}$ 是整数且方程 $(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(m^2-1)=0$ 的根都为整数.

方程

$$(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(m^2-1)=0$$

的根为

$$x_{1,2}=-1+\frac{m(a+b)\pm\sqrt{m^2(a+b)^2-4ab(m^2-1)}}{2}=-1+\frac{m(a+b)\pm\sqrt{m^2(a-b)^2+4ab}}{2}.$$

当 $\sqrt{m^2(a-b)^2+4ab}$ 是整数时,容易证明 $m(a+b)$ 与 $\sqrt{m^2(a-b)^2+4ab}$ 的奇偶性相同,因此,方程 $(x+1)^2-m(a+b)(x+1)+ab(m^2-1)=0$ 的根都为整数当且仅当 $\sqrt{m^2(a-b)^2+4ab}$ 是整数.

推论 1 $G_1(2k^2+4k+1,(2k+1)^2t,(2k+3)^2t)$ 是整谱图,其中 k,t 是正整数.

证明

由 $(2k^2+4k+1)^2((2k+1)^2t+(2k+3)^2t)^2-4((2k+1)(2k+3)t)^2(2(2k^2+4k+1)-1)=$

$t^2(256k^8+2048k^7+6784k^6+12032k^5+12432k^4+7744k^3+2944k^2+640k+64)=t^2(16k^4+64k^3+84k^2+40k+8)^2$,即得.

推论 2 (1) $G_3(4k^2+3k,(2k)^2t,(2k+1)^2t$是整谱图;

(2) $G_3(4k^2+5k+1,(2k+1)^2t,(2k+2)^2t)$是整谱图;

(3) $G_3(4k^2+3k,(4k+1)^2t,(4k+3)^2t)$是整谱图;

(4) $G_3(4k^2+5k+1,(4k+1)^2t,(4k+3)^2t)$是整谱图.

其中 k,t是正整数.

证明

(1) 由 $(4k^2+3k)^2((2k)^2t-(2k+1)^2t)^2+4(2k(2k+1)t)^2=t^2(256k^6+512k^5+416k^4+160k^3+25k^2)=t^2(16k^3+16k^2+5k)^2$即得.

(2) 由 $(4k^2+5k+1)^2((2k+1)^2t-(2k+2)^2t)^2+4((2k+1)(2k+2)t)^2=t^2(256k^6+1024k^5+1696k^4+1504k^3+761k^2+210k+25)=t^2(16k^3+32k^2+21k+5)^2$即得.

(3) 由 $(4k^2+3k)^2((4k+1)^2t-(4k+3)^2t)^2+4((4k+1)(4k+3)t)^2=t^2(4096k^6+10240k^5+10496k^4+5888k^3+1984k^2+384t+36)=t^2(64k^3+80k^2+32k+6)^2$即得.

(4) 由 $(4k^2+5k+1)^2((4k+1)^2t-(4k+3)^2t)^2+4((4k+1)(4k+3)t)^2=t^2(4096k^6+14336k^5+20736k^4+15616k^3+6336k^2+1280k+100)=t^2(64k^3+112k^2+64k+10)^2$即得.

文献 [4]证明恰好有 13个连通的 3正则整谱图,文献 [5]讨论连通的 4正则整谱图,下面讨论一类 k正则整谱线图.

引理 5[8] 若 c是 n阶图 G中长为 k的闭途径的个数,则

$$c=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k.$$

引理 6 设 G是参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2)的二部半正则图 (其中 $r_1,r_2\geqslant 2$),G的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n_1+n_2}$,则 G的 4圈数 $\#(C_4)=\frac{1}{8}(\sum_{i=1}^{n_1+n_2}\lambda_i^4-2n_1r_1-4n_1\binom{r_1}{2}-4n_2\binom{r_2}{2}))$.

证明 长为 4的闭途径覆盖的图为 P_2、P_3以及 C_4,覆盖 P_2的长为 4的闭途径数目为 2,覆盖 P_3的长为 4的闭途径数目为 4,覆盖 C_4的长为 4的闭途径数目为 8,图 G中子图 P_2和 P_3的数目分别为 n_1r_1和 $n_1\binom{r_1}{2}+n_2\binom{r_2}{2}$.因此,由引理 5有$\sum_{i=1}^{n_1+n_2}\lambda_i^4=2n_1r_1+4n_1\binom{r_1}{2}+4n_2\binom{r_2}{2}+8t(C_4)$.

引理 7[1] 设 G是参数为 (n_1,n_2,r_1,r_2)的二部半正则图,则

$$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{U}\cdot\sqrt{(-\frac{T_1}{T_2})^{n_1-n_2}P_G(\sqrt{T_1T_2})P_G(-\sqrt{T_1T_2})},$$

其中 $T_i=x-r_i+2,(i=1,2)$,$U=n_1r_1-n_1-n_2$.

因为 $P_G(-x)=(-1)^{n_1+n_2}P_G(x)$,引理 7的结论简化为

$$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{U}\sqrt{(\frac{T_1}{T_2})^{n_1-n_2}}P_G(\sqrt{T_1T_2}).$$

在图 G的每条边上添加一个新的顶点所得的图 $S(G)$称为 G的剖分图.

引理 8[1] 若 G是 n阶 r正则图,则

$$P_{S(G)}(x)=x^{\frac{1}{2}nr-n}P_G(x^2-r).$$

定理 2 设 G是参数为 $(n_1,n_2,2,k)$的连通二部半正则图 $(k\geqslant 3)$,则 $L(G)$是整谱图当且仅当 G是完全二部图 $K_{k,2}$或剖分图 $S(K_{k+1})$.

证明 设 G是参数为 $(n_1,n_2,2,k)$的连通二部半正则图 $(2n_1=kn_2)$,G的特征值是 $\pm\lambda_1,\pm\lambda_2,\cdots,\pm\lambda_t,0$,其中 $\lambda_1>\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_t>0$($t$可以是 1),$P_G(x)=x^{n_1+n_2-2t}\prod_{i=1}^{t}(x^2-\lambda_i^2)$,由引理 7得

$$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{n_1-n_2}(\frac{x}{x-k+2})^{\frac{n_1-n_2}{2}}(x(x-k+2))^{\frac{n_1+n_2-2t}{2}}\prod_{i=1}^{t}(x(x-k+2)-\lambda_i^2=x^{n_1-t}(x+2)^{n_1-n_2}(x-k+2)^{n_2-t}\prod_{i=1}^{t}(x^2-(k-2)x-\lambda_i^2).$$

方程 $x^2-(k-2)x-\lambda_i^2=0$的根是 $\frac{k-2\pm\sqrt{(k-2)^2+4\lambda_i^2}}{2}$,则 $L(G)$的正特征值是 $\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+4\lambda_i^2}}{2}$.由 $L(G)$是 k正则图,得到$\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+4\lambda_1^2}}{2}=k$,则 $\lambda_1=\sqrt{2k}$.因为 $L(G)$是整谱图,则对于 $2\leqslant i\leqslant t$,$\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+4\lambda_i^2}}{2}$是不超过 $k-1$的整数,又显然$\frac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+4\lambda_i^2}}{2}>k-2$,从而 $\lambda_i=\sqrt{k-1}$.因此

$$Spec(G)=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{2k} & \pm\sqrt{k-1} & 0\\ 1 & t-1 & n_1+n_2-2t\end{pmatrix}.$$

因为 G有 $2n_1$条边,则 $2n_1=2k+(k-1)(t-1)$,因此 $t=\frac{2n_1-k-1}{k-1}=\frac{kn_2-k-1}{k-1}$.由引理 6,$t(C_4)=\frac{1}{8}(8k^2+4(n_1-k)(k-1)-8n_1-2k(k-$

$1)n_2) = \frac{k^2+k-kn_2}{2}$,由 $t(C_4)\geqslant 0$,得到 $n_2\leqslant k+1$,由 $t=\frac{kn_2-k-1}{k-1}$是正整数,得到 $n_2\geqslant 2$且 $k-1$整除 $k(n_2-2)$,而 $k-1$与 k互素,则 $k-1$整除 n_2-2,因此 $n_2=2$或者 $n_2=k+1$.

当 $n_2=2$时,$n_1=k$,则 G是 $K_{k,2}$.

当 $n_2=k+1$时,$n_1=\frac{k(k+1)}{2}$且 $t(C_4)=0$,显然 G是 $S(K_{k+1})$.

反之,由引理 1及引理 7得,$P_{K_{k,2}}(x)=x^k(x^2-2k)$,$P_{L(K_{k,2})}(x)=x^{k-1}(x+2)^{k-1}(x-k+2)(x-k)$,即 $L(K_{k,2})$是整谱图.又因为

$$P_{K_{k+1}}(x)=(x+1)^k(x-k),$$

由引理 8及引理 7得,

$$P_{S(K_{k+1})}(x)=x^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x^2-2k)(x^2-k+1)^k,$$

$$P_{L(S(K_{k+1}))}(x)=x^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x+2)^{1+\frac{(k+1)(k-2)}{2}}(x+1)^k(x-k+1)^k(x-k).$$定理证毕.

如果线图 $L(G)$是正则图,则 G或为正则图或为二部半正则图.又当 G是 n阶 r正则图时,$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{\frac{1}{2}nr-n}P_G(x-r+2)$,因此,$L(G)$是整谱图当且仅当 G是整谱图.由定理 2即可得

推论 3 (1)恰好有 3个连通的 3正则整谱线图:$L(K_{1,4})$,$L(K_{2,3})$及 $L(S(K_4))$.

(2)恰好有 16个连通的 4正则整谱线图:$L(K_{1,5})$,$L(K_{2,4})$,$L(S(K_5))$及 13个连通的 3正则整谱图的线图.

最后,我们提出一个有待研究的问题:给出所有的 5正则整谱线图.

参考文献

1 Cvetkovic D, Doob M, Sach H. Spectra of Graphs. The Macmillan Press, 1993.

2 Cvetkovic D, Doob M, Sach H et al. . Recent Results in the Theory of Graph Spectra. Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1988.

3 Wang Ligong, Li Xueliang, Zhang Shenggui. Construction of integral graphs. Appl Math J Chinese Univ, Ser B, 2000, 15(3): 239~246.

4 Allen J. Schwenk. Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra. In: Theory and Applications of Graphs (Proc. Kalamazoo, 1976, ed. Y. Alavi, D. Lick). Springer-verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978. 516~533.

5 Cvetkovic D, Simic S, Stevanovic D. 4-regular integral graphs. Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat, 1998, (9): 89~102.

6 Harary F, Schwenk A J. Which graphs have integral spectra. In: Bari R, Harary F, eds. Springer Lecture Notes. 1974, (406): 45~51.

7 张德龙,谭尚旺.二部半正则图的谱.广西工学院学报,2001, 12(1): 1~5.

8 柳柏濂.组合矩阵论.北京:科学出版社, 1996.

(责任编辑:邓大玉 曾蔚茹)

(上接第 164页 Continue from page 164)

参考文献

1 贝.胡佩特[德].有限群论(中译本第一卷).福州:福建人民出版社,1992.

2 张远达.有限群构造(上,下).北京:科学出版社,1982.

3 徐明曜等.有限群导引(上,下).北京:科学出版社,1999.

4 王品超,温凤桐,李文祥.有限群的 C-正规子群.曲阜师范大学学报,1997, 23(4): 5~7.

5 苏向盈.有限群的半正规子群.数学杂志,1988, 8(1): 5~9.

6 王品超.超可解群的若干充分条件.数学学报,1990, 33(4): 480~484.

7 Wang Y. C-Normality of groups and its properties. J of Algebra, 1996, 180: 954~965.

8 王燕鸣.极小子群对有限群结构的影响.数学学报,2001, 44(2): 197~200.

9 陈重穆.内外$\sum$群与极小非$\sum$群.重庆:西南师范大学出版社,1988.

(责任编辑:黎贞崇)