DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.03.003

广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (3): 169~ 170, 175

Dirichlet L-函数的二次加权均值分布*

On the Second Power Mean Distribution of Dirichlet L-functions

高 丽

Gao Li

(延安大学数学与计算机科学学院 陕西延安 716000)

(College of Math.& Comp. Sci., Yan'an University, Yan'an, Shannxi, 716000, China)

摘要 利用三角和估计、特征和估计等解析方法研究 Dirichlet L函数的二次加权均值分布,得出均值分布的渐近公式

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|G(m,\chi)|^2|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\phi^2(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 qd(q)\right).$$

关键词 Dirichlet L-函数 均值分布 特征和 渐近公式 Gauss和

中图法分类号 O156.4

Abstract The second power mean distribution of Dirichlet L-functions is studied by using some analytic methods such as estimation of trigonometric sum, estimation of character sum ect.. Its asymptotic formula is given as follows:

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|G(m,\chi)|^2|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\phi^2(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 qd(q)\right).$$

Key words Dirichlet L-functions, distribution of mean value, character sums, asymptotic formula, Gauss sums

1 定理

设 $q\geqslant 2$为整数, χ为模 q的 Dirichlet特征,对任意的整数 m, Gauss和 $G(m,\chi)$ 定义如下:

$$G(m,\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma}{q}\right),\quad \text{其中 } e(n)=e^{2\pi in}.$$

关于 Gauss和的性质,许多数论书中都有研究,然而 $G(m,\chi)$ 的最重要的性质就是:当 χ是模 q的原特征且 $(m,q)=1$时有 $|G(m,\chi)|=\sqrt{q}$. 对于非原特征 χ, $|G(m,\chi)|$ 的值变化很大.也就是说,对不同的特征 χ, $|G(m,\chi)|$ 的值的分布很不规则.但是在许多加权均值中 $|G(m,\chi)|$ 又表现出良好的值的分布性质.本文就可以说明这一点.设 χ为模 q的 Dirichlet特征, $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$为 Dirichlet L-函数.本文利用三角和估计、特征和估计、以及一些解析方法研究了 Dirichlet L-函数的二次加权均值分布,得到如下定理.

定理 1 设整数 $q\geqslant 2$,对任意整数 m且 $(m,q)=1$,有均值分布的渐近公式

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|G(m,\chi)|^2|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\phi^2(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 qd(q)\right),$$

其中$\sum_{\chi\neq\chi_0}$ 表示对模 q的非主特征求和. $\prod_{p|q}$ 表示对 q的所有素因数求积. $\phi(q)$为 Euler函数, $d(q)$为除数函数.

2 主要引理

引理 1 设整数 $q\geqslant 2$, χ表示模 q的 Dirichlet特征,有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\phi(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{\frac{1}{2}}\ln^2 q\right).$$

证明 为了方便书写,设

$$A(\chi,y)=\sum_{q<n\leqslant y}\chi(n),$$

则由 L-函数的定义与 Abel恒等式得

2002-12-30收稿。

* 陕西省教育厅专项科研计划项目 (00JK123)资助。

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y.$$

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^{2}=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)+$$
$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y+$$
$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y+$$
$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\triangleq M+L.$$

首先我们来计算主项 M,由特征和的正交关系可知,当 $(mn,q)=1$时有恒等式

$$\sum_{\chi \bmod q}\chi(n)\bar\chi(m)=\begin{cases}\phi(q), & 若\ n\equiv m(\bmod q),\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

由此可得

$$M=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)=$$
$$\phi(q)\sum_{n=1}^{q}{}'\frac{1}{n^{2}}-\sum_{n=1}^{q}{}'\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{m}=$$
$$\frac{\pi^{2}}{6}\phi(q)\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^{2}}\right)+O\left(\ln^{2}q\right),$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}\prod_{p\mid q}\left(1-\frac{1}{p^{2}}\right)$.

其次估计误差项 L,由 Polya-vinogradov 定理知,对任意 $y\geqslant 1$有

$$|A(\chi,y)|\ll q^{\frac{1}{2}}\ln q,$$

因此有

$$L=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y+$$
$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y+$$
$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\int_{q}^{+\infty}\frac{A(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\ll$$
$$\phi(q)\ln q\int_{q}^{+\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}}\ln q}{y^{2}}\mathrm{d}y+\phi(q)\ln q\int_{q}^{+\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}}\ln q}{y^{2}}\mathrm{d}y+$$
$$\phi(q)\left(\int_{q}^{+\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}}\ln q}{y^{2}}\mathrm{d}y\right)^{2}\ll q^{\frac{1}{2}}\ln^{2}q+\ln^{2}q\ll q^{\frac{1}{2}}\ln^{2}q.$$

于是得引理结论成立.

引理 2[3] 设 q,m为整数且 $q\geqslant 2$,则有估计式

$$\sum_{a=1}^{q}{}'e\left(\frac{ma}{q}\right)\leqslant\sum_{d\mid(m,q)}d.$$

引理 3 设整数 $q\geqslant 2$, χ为模 q的 Dirichlet特征,则有估计式

$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^{2}\right|\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{2}qd(q).$$

证明 首先设

$$A(\chi,y)=\sum_{\frac{q}{sd+1}<n\leqslant y}\chi(n),$$
$$B(\chi,y)=\sum_{q<n\leqslant y}\chi(n),$$

则由 L-函数的定义与 Abel恒等式得

$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)|L(1,\chi)|^{2}\right|\leqslant$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)\left(\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)\right|+$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)\left(\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{B(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\right|$$
$$+\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)\cdot\right.$$
$$\left.\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\right|+\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\cdot$$
$$\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(sd+1)\int_{\frac{q}{sd+1}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\int_{q}^{+\infty}\frac{B(\bar\chi,y)}{y^{2}}\mathrm{d}y\right|\triangleq$$
$$M_1+M_2+M_3+M_4,$$

下面估计每一项,由特征和的正交关系得

$$M_1=\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{\chi \bmod q}\chi(sd+1)\cdot\right.$$
$$\left.\left(\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}\frac{\chi(n)}{n}\right)\left(\sum_{m=1}^{q}\frac{\bar\chi(m)}{m}\right)-\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}{}'\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{m}\right|\leqslant$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\phi(q)\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}{}'\sum_{\substack{m=1\\(sd+1)n\equiv m(q)}}^{q}{}'\frac{1}{nm}+\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d(\ln^{2}q)\ll$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\phi(q)\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}\frac{1}{(sd+1)n^{2}}+q\ln^{2}qd(q)\ll$$
$$q\ln^{2}qd(q),$$

再由 Polya-Vinogradov定理得

$$M_2\ll\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{\frac{q}{sd+1}}\frac{1}{n}\right)\int_{q}^{+\infty}\frac{|B(\bar\chi,y)|}{y^{2}}\mathrm{d}y\ll$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\phi(q)\ln q\int_{q}^{+\infty}q^{\frac{1}{2}}\ln q\frac{1}{y^{2}}\mathrm{d}y\ll$$
$$\sum_{d\mid q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\phi(q)\ln^{2}q\,q^{-\frac{1}{2}}\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{2}qd(q).$$

类似可得:

$$M_3\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{2}qd(q),\quad M_4\ll q^{\frac{3}{2}}\ln^{2}qd(q).$$

所以有引理 3结论成立.

3 定理的证明

由 Gauss和的定义知,当 $(m,q)=1$时有

(下转第 175页 Continue on page 175)

须证明 $\sup_{x\in A}|\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)X_{ni}|\to 0$, a. s.即可.在此证明中仍采用定理 3证明中的记号.

(i) 先证 $\sup_{x\in A}|S'_n(x)|\to 0$, a. s.

因为 $k_n(x)\leqslant k_n$,所以

$P(|S'_n(x)|>X)\leqslant$

$Cn^{r/p}E|\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)n^{-1/p}X_{ni}(1)|^{r}\leqslant Ck_n^{r}n^{r/p}n^{r/2}\leqslant$

$$C_5 n^{-(T-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r}. \qquad (17)$$

此处 C_5是与 x,n均无关的常数.根据(17)式,完全利用定理 2的证明方法即可证明 $\sup_{x\in A}|S'_n(x)|\to 0$, a. s.,此处要求选取 $(1+\frac{1}{p})/U<\_<[(T-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r-1]/d$.

(ii) 下面证明 $\sup_{x\in A}|S''_n(x)|\to 0$, a. s.

首先

$\sup_{x\in A}|ET_n(x)|\leqslant \sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|E|X_{ni}(2)|\leqslant$

$\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|\{E|X_{ni}|I(|X_{ni}|>n^{1/p})+n^{1/p}P(|X_{ni}|>n^{1/p})\}\leqslant C\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|\{n^{-(p-1)/p}+n^{1/p-1}\}\leqslant$

$$Cn^{-(p-1)/p}\to 0, \text{当 } n\to\infty \text{ 时}. \qquad (18)$$

又 $\sup_{x\in A}|k_{ni}(x)|\leqslant k_n$,从而

$\sup_{x\in A}|T_n(x)|\leqslant \sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)||X_{ni}(2)|\leqslant$

$k_n\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}(2)|\leqslant C_6 n^{-T}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}(2)|\leqslant$

$C_6\{n^{-T}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}|I(|X_{ni}|>n^{1/p})+n^{-T}n^{1/p}\sum_{i=1}^{n}I(|X_{ni}|>n^{1/p})\}=:C_6\{J_{n1}+J_{n2}\}$.

C_6是与 x,n无关的常数.而 $J_{n1}\to 0$, a. s.和 $J_{n2}\to 0$, a. s.从而有 $\sup_{x\in A}|T_n(x)|\to 0$, a. s.,结合(18)式知 $\sup_{x\in A}|S''_n(x)|\to 0$, a. s.

综合(i)、(ii),得 $\sup_{x\in A}|S_n(x)|\to 0$, a. s.

参考文献

1 Georgiev A A. Consistent nonparametric multiple regression: the fixed design case. J Multivariate Anal, 1988, 25: 100～110.

2 Priestly M B, Chao M T. Nonparemetric funtion fitting. J Roy Statist Soc Ser B, 1972, 34: 385～392.

3 Clark R M et al.. Nonparametric estimation of a smooth regression function. J Roy Statist Soc Ser B, 1997, 39: 107～113.

4 Roussas G G, Tranand L T, Ioannides D A. Fixed design regression for time series: asymptotic normality. J Multivariate Anal, 1992, 40: 162～291.

5 Yang Shanchao. Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for negatively association samples. Statist prob Lett, 2003, 62: 101～110.

6 Fan Y. Consistent nonparametric multiple regression for dependent heterogeneous processes: the fix design case. J Multivariate Anal, 1990, 33: 72～88.

7 杨善朝.基于鞅序列非参数回归函数的估计.系统科学与数学, 1999, 19(1): 79～85.

8 Birkel T. Moment bounds for associated sequences. Ann Probab, 1988, 16: 1184～1193.

(责任编辑: 邓大玉 曾蔚茹)

(上接第 170页 Continue from page 170)

$\sum_{i\neq i_0}|G(m,i)|^2|L(1,i)|^2=$

$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(a-b)m}{q}\right)\sum_{i\neq i_0}i(a\bar{b})|L(1,i)|^2=$

$\sum_{c=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{(cb-b)m}{q}\right)\sum_{i\neq i_0}i(c)|L(1,i)|^2=$

$\sum_{b=1}^{q}\sum_{i\neq i_0}|L(1,i)|^2+$

$\sum_{c=2}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}'e\left(\frac{mb(c-1)}{q}\right)\sum_{i\neq i_0}i(c)|L(1,i)|^2=$

$h(q)\sum_{i\neq i_0}|L(1,i)|^2+$

$O\left(\sum_{c=2}^{q}{}'\sum_{d|(q,c-1)}d\left|\sum_{i\neq i_0}i(c)|L(1,i)|^2\right|\right)=$

$h(q)\sum_{i\neq i_0}|L(1,i)|^2+$

$O\left(\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}}d\left|\sum_{i\neq i_0}i(sd+1)|L(1,i)|^2\right|\right)=$

$\frac{\pi^2}{6}h^2(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 q d(q)\right).$

证毕.

参考文献

1 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlay, 1976.

2 潘承洞,潘承彪.解析数论基础.北京:科学出版社, 1991.

3 易媛,张文鹏.关于 Dirichlet L-函数的一次加权均值.系统科学与数学, 2000, 20(3): 346～351.

4 Malyshev A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimation (in Russian). Vestnik Leningrad Univ., 1960, 15(3): 59～75.

5 Apostol T M. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

(责任编辑: 黎贞崇)