DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (3): 171～175

PA样本非参数回归权函数估计的强相合性*

Strong Consistency of the Nonparametric Regression Weighted Function Estimator for Positive Associated Samples

黎玉芳 杨善朝
Li Yufang Yang Shanchao

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林市育才路 3号 541004)
(Math. and Comp. Sci. College, Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 在 PA样本下,讨论非参数回归模型中权函数估计的强相合性及强一致相合性.
关键词 PA样本 非参数回归 权函数估计 强相合性
中图法分类号 O212.7

Abstract The strong consistency of the nonparametric regression weighted function estimator for positive associated samples is discussed.
Key words positive associated sample, nonparametric regression, weighted function estimator, strong consistency

d是一个正整数,A是 R^d 上的一个紧集.考虑非参数回归模型

$$Y_{ni} = g(x_{ni}) + X_{ni},\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{1}$$

其中 x_{ni} 为已知的设计点列,g 为 A 上的未知连续有界的回归函数,X_{ni} 是均值为零的随机误差,Y_{ni} 为可观察的随机变量.它们定义在同一个概率空间 (K, A, P).基于观察值 $\{x_{ni}, Y_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n\}$,$g(x)$的一个估计为

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)Y_{ni}, \tag{2}$$

其中 $k_{ni}(x) = k_{ni}(x, x_{n1}, \cdots, x_{nn})$ 为可测的权函数,$i = 1, 2, \cdots, n$,满足基本假设

A1: (a) $\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)\to 1$,当 $n\to\infty$;

(b) $\sum_{i=1}^{n} |k_{ni}(x)|\leqslant B$,对 $\forall n\geqslant 1$;

(c) $\sum_{i=1}^{n} |k_{ni}(x)| I(\| x - x_{ni}\| > a)\to 0$,当 $n\to\infty$, $\forall a > 0$.

或

A1′: (a) $\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)\to 1$,当 $n\to\infty$;

(b) $\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n} |k_{ni}(x)|\leqslant B$,对 $\forall n\geqslant 1$;

(c) $\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n} |k_{ni}(x)| I(\| x - x_{ni}\| > a)\to 0$,当 $n\to\infty$, $\forall a > 0$.

在独立样本的情形下,Georgiev[1]研究 $g_n(x)$的弱相合、平方相合、强相合、完全收敛和渐近正态等性质,除此之外还有 Priestly和 Chao[2], Clark等[3]也在独立情形下研究了 $g_n(x)$ 的性质.在 T-混合样本下,Roussas Tran and和 Ioannides[4]证明 $g_n(x)$的渐近正态性.在 NA相依样本下,Yang Shanchao[5]证明 $g_n(x)$的一致渐近正态性,并给出一致渐近正态性的收敛速度.在鞅差序列或 L^q-混合鞅时,Fan[6]讨论 $g_n(x)$的 q阶矩相合和渐近正态性,杨善朝[7]讨论 $g_n(x)$的 q阶矩相合和强相合性,并改进推广 Fan[6]的结论.本文则在 $\{X_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n\}$为 PA相依时给出 $g_n(x)$的强相合性和强一致相合性的结论.

定义 1 设集合 A_1与 A_2为$\{1, 2, \cdots, n\}$的任何 2个不相交的非空子集,称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n\geqslant 2)$是 PA的,如果

$$Cov(f_1(X_i, i\in A_1), f_2(X_j, j\in A_2))\geqslant 0.$$

其中 f_1和 f_2是任何 2个使得协方差存在且对每个变元均非降(或同对每个变元均非升)的函数.称随机变量序列$\{X_i, i\geqslant 1\}$是 PA序列,如果对任何 $n\geqslant 2$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 PA的.

1 主要结论

我们再作如下基本假设

A2 $\{\xi_j: j\geqslant 1\}$是 PA相依且具有零均值的随机变量序列.对每一个 n,$\{X_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n\}$的联合分布与

2002-12-06收稿, 2003-04-21修回。
* 国家自然科学基金项目 (10161004) 和广西自然科学基金项目 (0007014) 资助。

$\{\varepsilon_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$的联合分布相同.

记

$$\beta_n(x):=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\beta_{ni}(x)|,\ \beta_n:=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in A}|\beta_{ni}(x)|,$$

$$u(n):=\sup_k\sum_{j:|j-k|\geqslant n}Cov(\varepsilon_j,\varepsilon_k).$$

定理 1 若基本假设 A1, A2成立,又设

(i) $|\xi_{ni}|\leqslant b$, a. s.;

(ii) 对 $\forall x\in A$, $\beta_n(x)=O(n^{-\alpha})$,其中$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$;

(iii) $u(n)=O(n^{-(r-2)/2})$,其中 r满足$(\alpha-\frac{1}{2})r>1$.

则对 $\forall x\in A$,

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\text{ a. s.} \tag{3}$$

定理 2 若基本假设 A1′, A2成立,又设

(i) $|\xi_{ni}|\leqslant b$, a. s.;

(ii) $\beta_n=O(n^{-\alpha})$,其中$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$;

(iii) $u(n)=O(n^{-(r-2)/2})$,其中 r满足$(\alpha-\frac{1}{2})r>1$;

(iv) 存在正数 γ(其中 $\gamma>d/[(\alpha-\frac{1}{2})r-1]$), γ_1, L_γ,对任何 $u,v\in A$,当 $\|u-v\|<\gamma_1$, n充分大时,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\beta_{ni}(u)-\beta_{ni}(v)|\leqslant L_\gamma\|u-v\|^\gamma.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|g_n(x)-g(x)|=0,\text{ a. s.} \tag{4}$$

定理 3 若基本假设 A1, A2成立,又设

(i) $\sup_i E|\xi_{ni}|^p<\infty$, $p>2$;

(ii) 对 $\forall x\in A$, $\beta_n(x)=O(n^{-\alpha})$,其中$\frac{1}{2}+\frac{1}{p}<\alpha\leqslant 1$;

(iii) $u(n)=O(n^{-(r-2)/2})$,其中$(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r>1$.

则对 $\forall x\in A$,

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\text{ a. s.} \tag{5}$$

定理 4 若基本假设 A1′, A2成立,又设

(i) $\sup_i E|\xi_{ni}|^p<\infty$, $p>2$;

(ii) $\beta_n=O(n^{-\alpha})$,其中$\frac{1}{2}+\frac{1}{p}<\alpha\leqslant 1$;

(iii) $u(n)=O(n^{-(r-2)/2})$,其中 r满足$(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r>1$;

(iv) 存在正数 γ(其中 $\gamma>(1+\frac{1}{p})d/[(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r-1]$), γ_1, L_γ,对任何 $u,v\in A$,当 $\|u-v\|<\gamma_1$, n充分大时,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\beta_{ni}(u)-\beta_{ni}(v)|\leqslant L_\gamma\|u-v\|^\gamma.$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|g_n(x)-g(x)|=0,\text{ a. s.} \tag{6}$$

本文用 $B,b,C,C_i,i=1,\cdots,6$表示常数,$I(\cdot)$表示示性函数.

2 几个引理

为了证明定理,先给出几个有用的引理.

引理 1[8] 设$\{\varepsilon_j: j\in N\}$是 PA随机变量序列,对所有的 $j\in N$,满足 $E\varepsilon_j=0$, $|\varepsilon_j|\leqslant B<\infty$. 记 $S_n=\sum_{j=1}^n\varepsilon_j$. 假设对某个 $r>2$,

$$u(n)=O(n^{-(r-2)/2}).$$

则存在不依赖于 n的常数 C,使得对所有的 $n\in N$,

$$\sup_{m\in N\cup\{0\}}E|S_{n+m}-S_m|^r\leqslant Cn^{r/2}. \tag{7}$$

现将引理 1推广如下:

引理 2 在引理 1的条件下,设$\{a_j, j\geqslant 1\}$是一实数列, $a:=\sup_j|a_j|<\infty$,则

$$E|\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j|^r\leqslant Ca^rn^{r/2}.$$

证明 记 $a_i^+:=\max\{a_i,0\}$, $a_i^-:=\max\{-a_i,0\}$,因为

$$E|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^r\leqslant C\{E|\sum_{i=1}^n a_i^+\varepsilon_i|^r+E|\sum_{i=1}^n a_i^-\varepsilon_i|^r\},$$

$$E|\sum_{i=1}^n a_i^+\varepsilon_i|^r=a^rE|\sum_{i=1}^n a_i^+a^{-1}\varepsilon_i|^r.$$

记 $X_i=a_i^+a^{-1}\varepsilon_i$,那么$\{X_i: i\geqslant 1\}$也是 PA的,注意到 $a_i^+a^{-1}\leqslant 1$,于是

$$|X_j|=|a_j^+a^{-1}\varepsilon_j|\leqslant|\varepsilon_j|\leqslant B<\infty,$$

$$\tilde{u}(n):=\sup_k\sum_{j:|j-k|\geqslant n}Cov(X_j,X_k)=$$

$$\sup_k\sum_{j:|j-k|\geqslant n}Cov(a_j^+a^{-1}\varepsilon_j,a_k^+a^{-1}\varepsilon_k)\leqslant$$

$$\sup_k\sum_{j:|j-k|\geqslant n}Cov(\varepsilon_j,\varepsilon_k)=u(n)=O(n^{-(r-2)/2}).$$

由引理 1,知 $E|\sum_{i=1}^n X_i|^r\leqslant Cn^{r/2}$,即 $E|\sum_{i=1}^n a_i^+\varepsilon_i|^r\leqslant Ca^rn^{r/2}$.

同理, $E|\sum_{i=1}^n a_i^-\varepsilon_i|^r\leqslant Ca^rn^{r/2}$. 因此, $E|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i|^r\leqslant Ca^rn^{r/2}$.

引理 3 (i)若基本假设 A1成立,则对 $\forall x\in A$,

$$\lim_{n\to\infty}|Eg_n(x)-g(x)|=0.$$

(ii) 若基本假设 A1′成立,则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|Eg_n(x)-g(x)|=0.$$

证明 引理 3的第(i)个结论就是文献[6]中的定理 2.1,证明从略.在此,只证引理 3的第(ii)个结论.

由于 $g(x)$ 在紧集 A 上连续且有界，因此，它一致连续，所以由假设 A1′ 知，对任意 $\varepsilon>0$，取 $a>0$ 充分小，则当 n 充分大时，有

$$\sup_{x\in A}|Eg_n(x)-g(x)|=\sup_{x\in A}|\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)g(x_{ni})-g(x)|\leqslant \sup_{x\in A}|\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)(g(x_{ni})-g(x))|+\sup_{x\in A}|g(x)(\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)-1)|\leqslant$$

$$\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)||g(x_{ni})-g(x)|I(\|x-x_{ni}\|\geqslant a)+\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)||g(x_{ni})-g(x)|I(\|x-x_{ni}\|<a)+\sup_{x\in A}|g(x)||\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)-1|\leqslant$$

$$2\sup_{x\in A}|g(x)|\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)|I(\|x-x_{ni}\|\geqslant a)+\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)|\varepsilon+\sup_{x\in A}|g(x)|\varepsilon\leqslant 2\sup_{x\in A}|g(x)|\varepsilon+B\varepsilon+\sup_{x\in A}|g(x)|\varepsilon=3\sup_{x\in A}|g(x)|\varepsilon+B\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，即证明

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|Eg_n(x)-g(x)|=0.$$

引理 4 设 $\{Z_i:i\geqslant 1\}$ 是随机变量序列，存在常数 $\delta>0$，使 $E|Z_i|=O(i^{-(1+2\delta)})$，则 $\sum_{i=1}^\infty Z_i$, a. s. 收敛.

证明 令 $T_n=\sum_{i=1}^n Z_i$，$\forall m\geqslant n\geqslant 1$，有

$$E|T_m-T_n|\leqslant\sum_{i=m+1}^m E|Z_i|\leqslant C\sum_{i=n+1}^m i^{-(1+2\delta)}\leqslant Cn^{-\delta}\to 0,\text{当 } n\to\infty.$$

因此 $\{T_n:n\geqslant 1\}$ 是 Cauchy 序列，从而存在 r. v. T，使 $E|T|<\infty$ 且 $E|T_n-T|\to 0$（当 $n\to\infty$）. 又 $\forall\varepsilon>0$，有

$$P(|T_{2^k}-T|>\varepsilon)\leqslant CE|T_{2^k}-T|\leqslant C\lim_n\sup E|T_{2^k}-T_n|\leqslant C\sum_{i=2^k+1}^\infty E|Z_i|\leqslant C\sum_{i=2^k+1}^\infty i^{-(1+2\delta)}\leqslant C\cdot 2^{-k\delta},\tag{8}$$

$$P(\max_{2^{k-1}<n\leqslant 2^k}|T_n-T_{2^{k-1}}|>\varepsilon)\leqslant CP(\sum_{2^{k-1}+1}^{2^k}|Z_i|>\varepsilon)\leqslant C\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}E|Z_i|\leqslant C\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}i^{-(1+2\delta)}\leqslant C\cdot 2^{-(k-1)\delta}.\tag{9}$$

由 (8) 式、(9) 式和子序列法知，$T_n\to T$, a. s. 从而有 $\sum_{i=1}^\infty Z_i$, a. s. 收敛.

3 定理证明

注意到

$$|g_n(x)-g(x)|\leqslant|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|+|Eg_n(x)-g(x)|.\tag{10}$$

定理 1 的证明 由引理 3 的 (i) 知，$\lim_{n\to\infty}|Eg_n(x)-g(x)|=0$. 又对 $\forall x\in A$，$\forall\varepsilon>0$，根据 Markov 不等式及引理 2，得

$$P(|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|>\varepsilon)\leqslant\frac{E|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|^r}{\varepsilon}\leqslant C\omega_n^r(x)n^{r/2}\leqslant C_1n^{-(\tau-\frac12)r}.\tag{11}$$

此处 C_1 是与 x 有关但与 n 无关的常数. 因为 $\frac12<\tau\leqslant 1$，$(\tau-\frac12)r>1$，所以

$$\sum_n P(|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|>\varepsilon)<\infty.$$

从而由 Borel-Cantelli 引理，知

$$|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|\to 0,\text{ a. s.}$$

综合 (10) 式，即证得 (3) 式成立.

定理 2 的证明 由 (10) 式及引理 3 的 (ii) 知，只须证明 $\sup_{x\in A}|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|\to 0$, a. s. 即可.

记 $S_n(x)=\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}$，取 $1/\gamma<\alpha<[(\tau-\frac12)r-1]/d$，对 $\forall x\in A$，用 B_k 记 A 中以 t_k 为中心，半径为 $n^{-\alpha}$ 的邻域，且使 $x\in B_k$. 由于 A 为紧集，故存在 $l=O(n^{d\alpha})$ 个这样的球覆盖 A，于是当 n 充分大时，

$$\sup_{x\in B_k}|S_n(x)-S_n(t_k)|=\sup_{x\in B_k}|\sum_{i=1}^n(\omega_{ni}(x)-\omega_{ni}(t_k))\varepsilon_{ni}|\leqslant b\sum_{i=1}^n\sup_{x\in B_k}|\omega_{ni}(x)-\omega_{ni}(t_k)|\leqslant b\sum_{i=1}^n Ln^{-\alpha\gamma}\leqslant bLn^{1-\alpha\gamma}\to 0.\tag{12}$$

又因为 $\omega_n(x)\leqslant\omega_n$，同样由 Markov 不等式和引理 2，又有

$$P(|S_n(x)|>\varepsilon)\leqslant CE|\sum_{i=1}^n\omega_{ni}(x)\varepsilon_{ni}|^r\leqslant C\omega_n^rn^{r/2}\leqslant C_2n^{-(\tau-\frac12)r}.\tag{13}$$

此处 C_2 是与 x,n 均无关的常数. 由 (12) 式和 (13) 式，当 n 充分大时，有

$$P(\sup_{x\in A}|S_n(x)|>\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^l\{P(\sup_{x\in B_k}|S_n(x)-S_n(t_k)|>\varepsilon)+P(|S_n(t_k)|>\varepsilon)\}=\sum_{k=1}^l P(|S_n(t_k)|$$

$> \varepsilon) \leqslant C_2 l n^{-(\alpha-\frac{1}{2})r} \leqslant C_2 n^{-[(\alpha-\frac{1}{2})r-d\_]}$.

由于 $(\alpha-\frac{1}{2})r-d\_>1$,所以 $\sum_n P(\sup_{x\in A}|S_n(x)|>\varepsilon)<\infty$.

从而由 Borel-Cantelli 引理,知

$$\sup_{x\in A}\left|\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)\eta_{ni}\right| \to 0.\ \text{a. s.}$$

定理 3的证明 由(10)式及引理 3的(i)知,只须证明 $\left|\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)\eta_{ni}\right| \to 0$, a. s. 即可.

令

$\xi_i(1) = -n^{1/p}I(\xi_i<-n^{1/p})+\xi_i I(|\xi_i|\leqslant n^{1/p})+n^{1/p}I(\xi_i>n^{1/p})$,

$\xi_i(2) = (\xi_i+n^{1/p})I(\xi_i<-n^{1/p})+(\xi_i-n^{1/p})I(\xi_i>n^{1/p})$,

$\tilde{\xi}_i(1) = \xi_i(1)-E\xi_i(1)$, $\tilde{\xi}_i(2)=\xi_i(2)-E\xi_i(2)$.

$\eta_{ni}(1) = -n^{1/p}I(\eta_{ni}<-n^{1/p})+\eta_{ni}I(|\eta_{ni}|\leqslant n^{1/p})+n^{1/p}I(\eta_{ni}>n^{1/p})$,

$\eta_{ni}(2) = (\eta_{ni}+n^{1/p})I(\eta_{ni}<-n^{1/p})+(\eta_{ni}-n^{1/p})I(\eta_{ni}>n^{1/p})$,

$\tilde{\eta}_{ni}(1) = \eta_{ni}(1)-E\eta_{ni}(1)$, $\tilde{\eta}_{ni}(2)=\eta_{ni}(2)-E\eta_{ni}(2)$,

$S'_n(x)=\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)\tilde{\eta}_{ni}(1)$, $S''_n(x)=\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)\tilde{\eta}_{ni}(2)$.

由此可知 $\xi_i=\xi_i(1)+\xi_i(2)$, $S_n(x)=S'_n(x)+S''_n(x)$.

(i) 先证 $|S'_n(x)|\to 0$, a. s.

由上述的取法可知,对每一个 i, $\xi_i(1)$, $\xi_i(2)$ 均为 ξ_i 的增函数,于是有

$Cov(\xi_i,\xi_j) = Cov(\xi_i(1)+\xi_i(2),\xi_j(1)+\xi_j(2)) = Cov(\xi_i(1),\xi_j(1))+Cov(\xi_i(1),\xi_j(2))+Cov(\xi_i(2),\xi_j(1))+Cov(\xi_i(2),\xi_j(2))\geqslant$

$$Cov(\xi_i(1),\xi_j(1)) = Cov(\tilde{\xi}_i(1),\tilde{\xi}_j(1)), \tag{14}$$

显然 $\{n^{-1/p}\tilde{\xi}_i(1), i\geqslant 1\}$ 也是 PA 的,且 $E(n^{-1/p}\tilde{\xi}_i(1))=0$, $|n^{-1/p}\tilde{\xi}_i(1)|\leqslant 1$. 由假设 A2知,对每一个 n, $\{n^{-1/p}\tilde{\eta}_{ni}(1), 1\leqslant i\leqslant n\}$ 的联合分布与 $\{n^{-1/p}\tilde{\xi}_i(1), 1\leqslant i\leqslant n\}$ 的联合分布相同. 又由(14)式,有

$v(n) := \sup_k \sum_{j:|j-k|\geqslant n} Cov(n^{-1/p}\tilde{\xi}_j(1), n^{-1/p}\tilde{\xi}_k(1)) = n^{-2/p}\sup_k\sum_{j:|j-k|\geqslant n}Cov(\tilde{\xi}_j(1),\tilde{\xi}_k(1))\leqslant u(n)=O(n^{-(r-2)/2})$.

于是由 Markov 不等式和引理 2,有

$P(|S'_n(x)|>\varepsilon)\leqslant Cn^{r/p}E\left|\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)n^{-1/p}\tilde{\eta}_{ni}(1)\right|^r \leqslant C\omega_n^r(x)n^{r/p}n^{r/2}\leqslant C_3 n^{-(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r}$.

此处 C_3 是与 x 有关但与 n 无关的常数. 因为 $(\alpha-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r>1$,所以

$$\sum_n P(|S'_n(x)|>\varepsilon)<\infty.$$

从而由 Borel-Cantelli 引理,知 $|S'_n(x)|\to 0$. a. s.

(ii) 下面证明 $|S''_n(x)|\to 0$, a. s.

记 $T_n(x)=\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(x)\eta_{ni}(2)$,则 $S''_n(x)=T_n(x)-ET_n(x)$. 注意到 $\sup_i E|\eta_{ni}|^p<\infty$,有

$|ET_n(x)|\leqslant\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)|\,E|\eta_{ni}(2)|\leqslant \sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)|\{E|\eta_{ni}|I(|\eta_{ni}|>n^{1/p})+n^{1/p}P(|\eta_{ni}|>n^{1/p})\}\leqslant C\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)|\{n^{-(p-1)/p}+n^{1/p-1}\}\leqslant$

$$Cn^{-(p-1)/p}\to 0, \text{当 } n\to\infty \text{ 时}. \tag{15}$$

又 $|\omega_{ni}(x)|\leqslant\omega_n(x)$,从而

$|T_n(x)|\leqslant\sum_{i=1}^n|\omega_{ni}(x)||\eta_{ni}(2)|\leqslant \omega_n(x)\sum_{i=1}^n|\eta_{ni}(2)|\leqslant C_4 n^{-\alpha}\sum_{i=1}^n|\eta_{ni}(2)|\leqslant$

$$C_4\{n^{-\alpha}\sum_{i=1}^n|\eta_{ni}|I(|\eta_{ni}|>n^{1/p})+n^{-\alpha}n^{1/p}\sum_{i=1}^n I(|\eta_{ni}|>n^{1/p})\} =: C_4\{J_{n1}+J_{n2}\}. \tag{16}$$

C_4 是与 x 有关但与 n 无关的常数.

令 $Y_i=i^{-\alpha}|\xi_i|I(|\xi_i|>i^{1/p})$, $Z_i=i^{-(\alpha-1/p)}I(|\xi_i|>i^{1/p})$,则

$E|Y_i| = i^{-\alpha}\cdot i^{1/p}\cdot i^{-1/p}E|\xi_i|I(|\xi_i|>i^{1/p})\leqslant i^{-(\alpha-1/p)}i^{-1}E|\xi_i|^p\leqslant Ci^{-(\alpha-1/p+1)}$,

$E|Z_i| = i^{-(\alpha-1/p)}P(|\xi_i|>i^{1/p})\leqslant Ci^{-(\alpha-1/p)}\cdot i^{-1}=Ci^{-(\alpha-1/p+1)}$.

因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}<\alpha$,所以 $\alpha-1/p+1>1$. 由引理 4知,$\sum_{i=1}^\infty Y_i$ 和 $\sum_{i=1}^\infty Z_i$ 均 a. s. 收敛,于是由 Kronecker 引理有 $n^{-\alpha}\sum_{i=1}^n|\xi_i|I(|\xi_i|>n^{1/p})\to 0$, a. s. 和 $n^{-\alpha}n^{1/p}\sum_{i=1}^n I(|\xi_i|>n^{1/p})\to 0$. a. s,又根据假设 A2,知 $J_{n1}\to 0$, a. s. 和 $J_{n2}\to 0$, a. s. 从而由(16)式有 $|T_n(x)|\to 0$, a. s. 结合(15)式知 $|S''_n(x)|\to 0$, a. s.

综合(i)、(ii),得 $|S_n(x)|\to 0$, a. s.

定理 4的证明 由(10)式及引理 3的(ii)知,只

须证明 $\sup_{x\in A}|\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)X_{ni}| \to 0$, a. s.即可 .在此证明中仍采用定理 3证明中的记号 .

(i) 先证 $\sup_{x\in A}|S'_n(x)| \to 0$, a. s.

因为 $k_n(x) \leqslant k_n$,所以

$$P(|S'_n(x)| > X) \leqslant$$

$$Cn^{r/p}E|\sum_{i=1}^{n} k_{ni}(x)n^{-1/p}X_{ni}(1)|^r \leqslant Ck_n^r n^{r/p} n^{r/2} \leqslant$$

$$C_5 n^{-(T-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r}. \quad (17)$$

此处 C_5是与 x ,n均无关的常数.根据 (17) 式 ,完全利用定理 2的证明方法即可证明 $\sup_{x\in A}|S'_n(x)| \to 0$, a. s. ,此处要求选取 $(1+\frac{1}{p})/U < \_ < [(T-\frac{1}{2}-\frac{1}{p})r - 1]/d$.

(ii) 下面证明 $\sup_{x\in A}|S''_n(x)| \to 0$, a. s.

首先

$$\sup_{x\in A}|ET_n(x)| \leqslant \sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|E|X_{ni}(2)| \leqslant$$

$$\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|\{E|X_{ni}|I(|X_{ni}| > n^{1/p}) + n^{1/p}P(|X_{ni}| > n^{1/p})\} \leqslant C\sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)|\{n^{-(p-1)/p} + n^{1/p-1}\} \leqslant$$

$$Cn^{-(p-1)/p} \to 0, \text{当 } n \to \infty \text{ 时}. \quad (18)$$

又 $\sup_{x\in A}|k_{ni}(x)| \leqslant k_n$,从而

$$\sup_{x\in A}|T_n(x)| \leqslant \sup_{x\in A}\sum_{i=1}^{n}|k_{ni}(x)||X_{ni}(2)| \leqslant$$

$$k_n\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}(2)| \leqslant C_6 n^{-T}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}(2)| \leqslant$$

$$C_6\{n^{-T}\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}|I(|X_{ni}| > n^{1/p}) + n^{-T}n^{1/p}\sum_{i=1}^{n}I(|X_{ni}| > n^{1/p})\} =: C_6\{J_{n1} + J_{n2}\}.$$

C_6是与 x ,n无关的常数 .而 $J_{n1} \to 0$, a. s.和 $J_{n2} \to 0$, a. s.从而有 $\sup_{x\in A}|T_n(x)| \to 0$, a. s. ,结合 (18) 式知 $\sup_{x\in A}|S''_n(x)| \to 0$, a. s.

综合 (i)、(ii) ,得 $\sup_{x\in A}|S_n(x)| \to 0$, a. s.

参考文献

1 Georgiev A A. Consistent nonparametric multiple regression: the fixed design case. J Multivariate Anal, 1988, 25 100~ 110.

2 Priestly M B, Chao M T. Nonparemetric funtion fitting. J Roy Statist Soc Ser B, 1972, 34 385~ 392.

3 Clark R M et al.. Nonparametric estimation of a smooth regression function. J Roy Statist Soc Ser B, 1997, 39: 107 ~ 113.

4 Roussas G G, Tranand L T, Ioannides D A. Fixed design regression for time series: asymptotic normality. J Multivariate Anal, 1992, 40: 162~ 291.

5 Yang Shanchao. Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for negatively association samples. Statist prob Lett, 2003, 62 101~ 110.

6 Fan Y. Consistent nonparametric multiple regression for dependent heterogeneous processes: the fix design case. J Multivariate Anal, 1990, 33: 72~ 88.

7 杨善朝 .基于鞅序列非参数回归函数的估计 .系统科学与数学 , 1999, 19(1): 79~ 85.

8 Birkel T. Moment bounds for associated sequences. Ann Probab, 1988, 16 1184~ 1193.

(责任编辑: 邓大玉 曾蔚茹)

(上接第 170页 Continue from page 170)

$$\sum_{i\neq i_0}|G(m, i)|^2|L(1, i)|^2 =$$

$$\sum_{a=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}' e\left(\frac{(a-b)m}{q}\right)\sum_{i\neq i_0} i(a\bar{b})|L(1, i)|^2 =$$

$$\sum_{c=1}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}' e\left(\frac{(cb-b)m}{q}\right)\sum_{i\neq i_0} i(c)|L(1, i)|^2 =$$

$$\sum_{b=1}^{q}\sum_{i\neq i_0}|L(1, i)|^2 +$$

$$\sum_{c=2}^{q}{}'\sum_{b=1}^{q}{}' e\left(\frac{mb(c-1)}{q}\right)\sum_{i\neq i_0} i(c)|L(1, i)|^2 =$$

$$h(q)\sum_{i\neq i_0}|L(1, i)|^2 +$$

$$O\left(\sum_{c=2}^{q}{}'\sum_{d|(q, c-1)} d\left|\sum_{i\neq i_0} i(c)|L(1, i)|^2\right|\right) =$$

$$h(q)\sum_{i\neq i_0}|L(1, i)|^2 +$$

$$O\left(\sum_{d|q}\sum_{s=1}^{\frac{q-1}{d}} d\left|\sum_{i\neq i_0} i(sd+1)|L(1, i)|^2\right|\right) =$$

$$\frac{\pi^2}{6}h^2(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + O\left(q^{\frac{3}{2}}\ln^2 q d(q)\right).$$

证毕.

参考文献

1 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlay, 1976.

2 潘承洞 ,潘承彪 .解析数论基础 .北京: 科学出版社 , 1991.

3 易媛 ,张文鹏 .关于 Dirichlet L-函数的一次加权均值 .系统科学与数学 , 2000, 20(3): 346~ 351.

4 Malyshev A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimation (in Russian). Vestnik Leningrad Univ. , 1960, 15(3): 59~ 75.

5 Apostol T M. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.

(责任编辑: 黎贞崇)