DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.03.006
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (3): 179~ 182

具强迫项的二阶非线性泛函微分方程解的振动性与渐近性

Oscillation and Asymptotic Property of Solutions for Second Order Nonlinear Functional Differential Equations with Forcing Term

蒋贵荣　　罗桂烈
Jiang Guirong　Luo Guilie

(广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路 3号　541004)
(Math. and Comp. Sci. College, Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　建立一类具有强迫项的二阶非线性泛函微分方程 $[p(t,x(t))x'(t)]'+f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=e(t)$ 的振动准则,并讨论解的渐近性.

关键词　二阶非线性泛函微分方程　振动性　渐近性　强迫项
中图法分类号　O177.91

Abstract　Oscillation criterion for second order nonlinear functional differential equations with forcing term

$$[p(t,x(t))x'(t)]'+f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=e(t)$$

is established, and the asymptotic property of its solutions is disscused.

Key words　second order functional differential equations, oscillation, asymptotic property, forcing term

1　基本假设和相关定义

泛函微分方程的振动理论发展很快[1,2],其中二阶非线性泛函微分方程的振动性已得到一些好的结果.例如,文献[3]利用 $H(t,s)$ 型函数得到方程

$$x''(t)+p(t)f(x(\tau(t)))g(x'(t))=0 \qquad (1)$$

的振动准则;文献[4]对文献[5,6]中的方程形式更一般的二阶非线性泛函微分方程

$$[p(t,x(t))x'(t)]'+f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=0 \qquad (2)$$

建立了新的振动准则.而对于带有强迫项的二阶非线性泛函微分方程来说,关于其振动性和渐近性的文章不多,所得结论也少.我们知道,一个方程是否具有强迫项,其解的振动性有很大的区别,如

$$y'(t)-y(t-\frac{3\pi}{2})=0,(t\in R_+) \qquad (3)$$

由文献[7]中的定理 3.1知(3)的一切有界解振动,但对于方程

$$y'(t)-y(t-\frac{3\pi}{2})=(1-e^{\frac{3\pi}{2}})e^{-t},(t\in R_+), \qquad (4)$$

尽管 $t\to+\infty$ 时,强迫项 $(1-e^{\frac{3\pi}{2}})e^{-t}\to 0$,它却有非振动解 $y=e^{-t}$.故讨论具强迫项的泛函微分方程解的振动性是必要的.本文讨论方程

$$[p(t,x(t))x'(t)]'+f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=e(t) \qquad (E)$$

的振动性与渐近性.

对方程(E)作如下基本假设(H):

(H_1) $p(t,x(t))\in C([t_0,+\infty)\times R,R^+)$ 且存在 $r_1(t),r_2(t)$ 使得 $0\leqslant r_1(t)\leqslant p(t,x(t))\leqslant r_2(t)$,其中 $r_1(t),r_2(t)\in C([t_0,\infty),R^+)$.

(H_2) $f\in C([t_0,+\infty)\times R^4,R)$,对于固定的 $t\geqslant t_0$,当 $u_1u_2>0$ 时,$u_1f(t,u_1,u_2,u_3,u_4)>0$.

(H_3) $g\in C([t_0,\infty),R)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=+\infty$ 且 $g(t)\leqslant t$.

(H_4) $e(t)\in C([t_0,\infty),R)$, $\int_{t_0}^{+\infty}|e(t)|\,dt<+\infty$.

本文只考虑方程(E)的存在于半直线 $[T,+$

2002-06-03收稿, 2003-01-08修回。

$\infty)$, $T\geq t_0$上连续的非平凡解.

定义 **1** 方程(E)的解称为振动的,如果此解的零点集合无界;否则此解称为非振动的.

定义 **2** 方程(E)为振动的,如方程(E)的所有解均为振动的;否则称方程(E)为非振动的.

定义 **3** 一个函数 $f(t)$ 称为最终为正(负),如果对充分大的 t_0,当 $t>t_0$时,$f(t)>0(f(t)<0)$.

由(H_1)知, $0\leqslant 1/r_2(t)\leqslant 1/p(t,x(t))\leqslant 1/r_1(t)$.并记:

$$R_i(t)=\int_t^{+\infty}\frac{ds}{r_i(s)},\ i=1,2,\quad Q_i(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{r_i(s)},\ i=1,2.$$

2 振动性

定理 **1** 设(H)成立,又下列条件满足

(A_1) $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{ds}{r_1(s)}<+\infty$;

(A_2) $\int_{t_0}^{+\infty}R_1(t)|e(t)|dt<+\infty$;

(A_3) $\int_{t_0}^{\infty}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|ds=\infty$;

$$\int_{t_0}^{\infty}R_2(t)|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|ds=\infty,$$

其中 $x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t))$ 不同时为零.则方程(E)振动.

证明 假设定理 1的结论不成立,则(E)存在非振动解 $x(t)$,这有 2种可能: $x(t)$最终为负和 $x(t)$最终为正.

(a) 当 $x(t)$ 为最终为负时,考虑到(H_3),则存在 $t_1\geqslant t_0$,当 $t\geqslant t_1$时,$x(t)<-m$,$x(g(t))<-m$,其中 $m>0$.由(H_2)有

$$f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=-|f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))|<0,\ t\geqslant t_1.$$

从 t_1到 t积分(E)得

$$p(t,x(t))x'=p(t_1,x(t_1))x'(t_1)+\int_{t_1}^{t}e(s)ds-\int_{t_1}^{t}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))ds.$$

利用条件(H_4)和(A_3)并令 $t\to+\infty$ 得: $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t,x(t))x'(t)=+\infty$.故存在 $t_2\geqslant t_1$,当 $t\geqslant t_2$时,$x'(t)>0$.从 t_2到 t积分(E)得

$$p(t,x(t))x'(t)=p(t_2,x(t_2))x'(t_2)+\int_{t_2}^{t}e(s)ds-\int_{t_2}^{t}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))ds\geqslant p(t_2,x(t_2))x'(t_2)-\int_{t_2}^{t}|e(s)|ds+\int_{t_2}^{t}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|ds.$$

因而

$$x'(t)\geqslant p(t_2,x(t_2))x'(t_2)/p(t,x(t))-\int_{t_2}^{t}|e(s)|/p(t,x(t))ds+\int_{t_2}^{t}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|/p(t,x(t))ds\geqslant p(t_2,x(t_2))\cdot x'(t_2)/r_2(t)-\int_{t_2}^{t}|e(s)|/r_1(t)ds+\int_{t_2}^{t}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|/r_2(t))ds,$$

再将上式从 t_2到 t积分得

$$x(t)\geqslant x(t_2)+p(t_2,x(t_2,x(t_2))x'(t_2)\int_{t_2}^{t}\frac{ds}{r_2(s)}-\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r_1(s)}\int_{t_2}^{s}|e(\xi)|d\xi ds+\int_{t_2}^{t}\frac{1}{r_2(s)}\int_{t_2}^{s}|f(\xi,x(\xi),x(g(\xi)),x'(\xi),x'(h(\xi)))|d\xi ds=x(t_2)+p(t_2,x(t_2))x'(t_2)\int_{t_2}^{t}\frac{ds}{r_2(s)}-\int_{t_2}^{t}\left(\int_{s}^{t}\frac{d\xi}{r_1(\xi)}\right)|e(s)|ds+\int_{t_2}^{t}\left(\int_{s}^{t}\frac{d\xi}{r_2(\xi)}\right)|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|ds.$$

对上式取极限得

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)\geqslant x(t_2)+p(t_2,x(t_2))x'(t_2)\int_{t_2}^{+\infty}\frac{ds}{r_2(s)}-\int_{t_2}^{+\infty}R_1(s)|e(s)|ds+\int_{t_2}^{+\infty}R_2(s)|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|ds.$$

由条件(A_1)-(A_3)知,$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=+\infty$.这与 $x(t)$最终为负矛盾.

(b) 当 $x(t)$为最终为正时,类似(a)可得出矛盾.定理 1证毕.

例 **1** 考虑方程

$$\left[\frac{1+x^2(t)}{2+x^2(t)}t^2x'(t)\right]'+t\frac{[x(t)+x(\ln(t))]^2+1}{x(t)+x(\ln(t))}[1+(x'(t))^2+(x'(\sqrt{t}))^2]=1/t^2,\ (t\geqslant t_0>0),\tag{5}$$

可取 $r_1(t)=t^2/2$, $r_2(t)=t^2$,则

$R_1(t)=2/t$, $R_2(t)=1/t$, $f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))=t\frac{[x(t)+x(\ln(t))]^2+1}{x(t)+x(\ln(t))}[1+(x'(t))^2+(x'(\sqrt{t}))^2]$满足($H_2$).

易知:$\int_t^{+\infty}\frac{ds}{r_1(s)}=\int_t^{+\infty}\frac{2}{t^2}dt<+\infty$,故($A_1$)成立.

$$\int_{t_0}^{+\infty}R_1(t)|e(t)|dt=\int_{t_0}^{+\infty}2/t^3dt<+\infty,\tag{6}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\left|t\frac{[x(t)+x(\ln(t))]^2+1}{x(t)+x(\ln(t))}[1+(x'(t))^2+(x'(\sqrt{t}))^2]\right|dt\geqslant\int_{t_0}^{+\infty}2tdt=+\infty,\tag{7}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t}\left|t\frac{[x(t)+x(\ln(t))]^2+1}{x(t)+x(\ln(t))}[1+(x'(t))^2+(x'(\sqrt{t}))^2]\right|\mathrm{d}t\geqslant\int_{t_0}^{+\infty}2\mathrm{d}t=+\infty, \qquad (8)$$

由(6),知(A_2)成立;由(7)与(8),知(A_3)成立.从而由定理1,方程(5)振动.

3 渐近性

定理 2 设(H)成立,又下列条件满足:

(B_1) $\int_{t_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{r_2(s)}=+\infty$; ($B_2$) $\int_{t_0}^{+\infty}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h)))|\mathrm{d}s=+\infty$.

则对(1)的任意解 $x(t)$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf|x(t)|=0$.

证明 设 $x(t)$ 是(E)的解,如 $x(t)$ 振动,显然定理成立;如 $x(t)$ 非振动,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf|x(t)|\neq0$,不失一般性,可设 $x(t)$ 最终为正,即: $x(t)\geqslant m>0$, $t\geqslant t_1\geqslant t_0$.由($H_3$),存在 $t_2\geqslant t_1$,使得

$$x(g(t))\geqslant m>0,\ f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))>0,\ t\geqslant t_2,$$

又(B_2),有

$$\int_{t_0}^{+\infty}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))\mathrm{d}s=+\infty,$$

从 t_2 到 t 积分(E)得

$$p(t,x(t))x'(t)=p(t_2,x(t_2))x'(t_2)+\int_{t_2}^{t}e(s)\mathrm{d}s-\int_{t_2}^{t}f(s,x(s),x(g(s),x'(s),x'(h(s)))\mathrm{d}s,$$

又 $\int_{t_0}^{+\infty}|e(t)|\mathrm{d}t<+\infty$,对上式令 $t\to+\infty$,有 $p(t,x(t))x'(t)\leqslant-k$, $t\geqslant t_3\geqslant t_2$,其中 k 为正常数.

故

$$x'(t)\leqslant-k/p(t,x(t)),$$

$$x(t)\leqslant x(t_3)-k\int_{t_3}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{p(s,x(s))}\leqslant x(t_3)-k\int_{t_3}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{r_2(s)},$$

由(B_1)知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=-\infty$.这与 $x(t)\geqslant m>0$ 矛盾.

当 $x(t)$ 为最终为负时,类似可得出矛盾.定理2证毕.

例 2 考虑方程

$$\left[\frac{1+x^2(t)}{2+x^2(t)}tx'(t)\right]'+t\frac{[x(t)+x(\ln(t))]^2+1}{x(t)+x(\ln(t))}[1+(x'(t))^2+x'(\sqrt{t})^2]=\frac{1}{t^2},\ (t\geqslant t_0>0), \qquad (9)$$

容易验证条件(H),(B_1),(B_2)成立,由定理2,对方程(9)的任意解 $x(t)$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf|x(t)|=0$.

定理 3 设(H)成立,又下列条件满足

(C_1) $\int_{t_0}^{+\infty}Q_1(s)|e(s)|\mathrm{d}s<+\infty$.

(C_2) $\int_{t_0}^{+\infty}Q_1(s)|f(s,x(s),x(g(s),x'(s),x'(h(s)))|\mathrm{d}s<+\infty$.

则方程(E)的一切有界振动解当 $t\to+\infty$ 时趋于零.

证明 设 $x(t)$ 是(E)的有界振动解且使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup|x(t)|\neq0$,则存在常数 $m>0$,使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup|x(t)|=2m$.因为

$$\int_{t_0}^{+\infty}Q_1(s)|e(s)|\mathrm{d}s<+\infty,\ \int_{t_0}^{+\infty}Q_1(s)|f(s,x(s),x(g(s),x'(s),x'(h(s)))|\mathrm{d}s<+\infty,$$

故存在 $t_1\geqslant t_0$,使得

$$\int_{t_1}^{+\infty}Q_1(s)|e(s)|\mathrm{d}s<\frac{m}{3},\ \int_{t_1}^{+\infty}Q_1(s)|f(s,x(s),x(g(s),x'(s),x'(h(s)))|\mathrm{d}s<\frac{m}{3},$$

设 t_k,t_{k+1} 是 $x(t)$ 的2个充分大的相邻零点,$t_k<t_{k+1}$,不妨设 $t\in(t_k,t_{k+1})$ 时,$x(t),x(g(t))>0$ $\max\limits_{t\in[t_k,t_{k+1}]}|x(t)|=x(\xi_k)>m$,其中 $\xi_k\in(t_k,t_{k+1})$,$x'(\xi_k)=0$.从 ξ_k 到 t 积分(E)得

$$p(t,x(t))x'(t)=p(\xi_k,x(\xi_k))x'(\xi_k)-\int_{\xi_k}^{t}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))\mathrm{d}s+\int_{\xi_k}^{t}e(s)\mathrm{d}s=\int_{t}^{\xi_k}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))\mathrm{d}s-\int_{t}^{\xi_k}e(s)\mathrm{d}s,$$

$$x'(t)\leqslant\int_{t}^{\xi_k}f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))/p(t,x(t))\mathrm{d}s+\int_{t}^{\xi_k}|e(s)|/p(t,x(t))\mathrm{d}s\leqslant\int_{t}^{\xi_k}|f(s,x(s),x(g(s)),x'(s),x'(h(s)))|/r_1(t)\mathrm{d}s+\int_{t}^{\xi_k}|e(s)|/r_1(t)\mathrm{d}s,$$

再将上式从 t_k 到 ξ_k 积分得

$$m<x(\xi_k)\leqslant x(t_k)+\int_{t_k}^{\xi_k}\int_{t}^{\xi_k}\frac{|f(s,x(s),x(g(s),x'(s),x'(h(s)))|}{r_1(t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_{t_k}^{\xi_k}\int_{t}^{\xi_k}\frac{|e(s)|}{r_1(t))}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_{t_k}^{\xi_k}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{r_1(s)}\right)|f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),x'(h(t)))|\mathrm{d}t+\int_{t_k}^{\xi_k}\left(\int_{t_k}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{r_1(s)}\right)|e(t)|\mathrm{d}t<\int_{t_1}^{+\infty}\left(\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{r_1(s)}\right)|f(t,x(t),x(g(t)),x'(t),$$

$x'(h(t)))| \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{+\infty} \left| \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{r_1(s)} \right| |e(t)| \mathrm{d}t =$

$\int_{t_1}^{+\infty} Q_1(t) |f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t)))| \mathrm{d}t +$

$\int_{t_1}^{+\infty} Q_1(t) |e(t)| \mathrm{d}t < \frac{m}{3} + \frac{m}{3} = \frac{2}{3} m.$

此式矛盾,故 $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup |x(t)| = 0$,又 $x(t)$ 是方程(E)的振动解,则 $\lim\limits_{t\to+\infty} \inf |x(t)| = 0$. 从而 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

例 **3** 考虑方程

$$\left[\frac{1 + x^2(t)}{2 + x^2(t)} \frac{1}{t} x'(t) \right]' +$$

$$\frac{1}{t^4} \frac{x(t) + x(\ln(t))}{[x(t) + x(\ln(t))]^2 + 1} [1 + (x'(t))^2 +$$

$$(x'(\sqrt{t}))^2]^{-1} = \frac{1}{t^4}, \tag{10}$$

在此方程中,可取 $r_1(t) = \frac{1}{2t}$,从而 $Q_1(t) = t^2 - t_0^2$,

$$\int_{t_0}^{+\infty} Q_1(t) |e(t)| \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{+\infty} (t^2 - t_0^2) \frac{1}{t^4} \mathrm{d}t <$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t < +\infty, \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} Q_1(t) |f(t, x(t), x(g(t)), x'(t),$$

$$x'(h(t)))| \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{\infty} (t^2 - t_0^2) \left| \frac{1}{t^4} \right.$$

$$\frac{x(t) + x(\ln(t))}{[x(t) + x(\ln(t))]^2 + 1} [1 + (x'(t))^2 +$$

$$(x'(\sqrt{t}))^2]^{-1} \Big| \mathrm{d}t \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{2t^2} \mathrm{d}t < +\infty.$$

由(11)式,知(C_1)成立;由(12)式,知(C_2)成立. 利用定理3可知方程(10)的一切有界振动解当 $t \to +\infty$ 时趋于零.

参考文献

1 张炳根.泛函微分方程振动理论的发展.科学通报,1998,43:345~354.

2 燕居让. n 阶非线性时滞微分方程的振动性与渐近性.数学学报,1990,33:537~545.

3 王其如.二阶非线性微分方程的振动准则.数学学报,2001,(44):2.

4 仉志余.非线性二阶微分方程的振动准则.系统科学与数学,2000,20(1):1~10.

5 Ladde G S, Laksmikamtham V, Zhang B G. Oscillation Theory of Differential Equation with Deviating Arguments. New York: Marcel Dekker, 1987.

6 Hamedani G G, Krenz G S. Oscillation criteria for certain second differential equations. Math Anal Appl, 1990, 149: 271~276.

7 郑祖庥.泛函微分方程理论.合肥:安徽教育出版社,1992.346.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第178页 Continue from page 178)

项式次数较高时,存在着组合爆炸问题;由于神经网络具有大规模并行处理,良好的自组织性、自适应性等优点,因此,本文提出的算法,特别适合于多维计算情形.

(III)从整体来看,Hensel构造方法的神经网络模型相比传统的Hensel构造方法,由于每步逼近基函数选取自由度大,无须进行模运算.因此,算法稳定性、容错性好.

(IV)从该算例看出,基于Hensel构造的回归神经网络近似符号计算新模型,完全刻划出在代数符号计算意义下,精确计算与近似计算的本质与联系.

4 结束语

文中将Hensel构造提升的方法与回归神经网络的特点有机地结合起来,提出了一种基于Hensel构造方法的回归神经网络近似符号计算新模型,它不但具有传统回归神经网络的特点,而且具有Hensel构造提升的方法和较强的并行计算功能,其目的是给人们研究代数符号计算与近似代数符号计算提供一种可视化手段,完全刻划精确计算与近似计算的本质与联系.

参考文献

1 Wang P S, Rothschild L P. Factoring polynomials over the integers. Math Comp, 1975, (29): 936~950.

2 Tateaki Sasaki, Massayuki Suzuki, Miroslav Kolar et al.. Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. Japan J Indust Appl Math, 1991, 5(3): 357~375.

3 周永权.基于代数神经网络的多元多项式近似因式分解模型及学习算法.计算机研究与发展,1999,36(6):668~674.

4 Huang D S. A neural network based factorization model for polynomials in several elements. In: Beijing 2000 5th International Conference on Signal Processing Proceedings (WCC2000-ICSP2000), 2000, 1617~1622.

(责任编辑:黎贞崇)