

Turbo 码在瑞利慢衰落信道中的性能仿真与分析*

Performance Analysis of Turbo Codes Over Rayleigh Slow-Fading Channels

陈跃波 黄旭方 覃团发

Chen Yuebo Huang Xufang Qin Tuanfa

(广西大学计算机与信息工程学院 南宁市大学路 100号 530004)

(Coll. of Comp. & Info. Eng., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 介绍瑞利衰落信道的编码信道模型,给出与这些模型相对应的仿真方法.然后针对充分交织瑞利平坦慢衰落信道,在未知信道状态信息的情况下,对 Turbo 码的译码算法 Log-MAP 进行修正,并进一步对影响 Turbo 码性能的主要参数:迭代次数、交织器长度、编码效率、分量编码器结构进行仿真与分析,得出的仿真结果可以指导实际无线信道中设计合理的通信 Turbo 码.

关键词 衰落信道 瑞利衰落信道 Turbo 码

中图法分类号 TN911.22

Abstract The coding channel model over Rayleigh fading channels is addressed, and its corresponding simulation method is given. A modified Log-MAP algorithm is proposed for Turbo codes in Rayleigh flat-slow-fading channels with imperfect channel state information, and some major parameters of Turbo codes are simulated with the modified Log-MAP algorithm. The simulation results are significant to design Turbo codes in wireless channel.

Key words fading channels, Rayleigh fading channels, Turbo codes

在许多无线电通信中,由于电波的反射、散射和绕射等,使得发射机和接收机之间存在多条传播路径,并且每条路径的传播时延和衰耗因子都是时变的,这样就造成接收信号衰落.多径衰落是移动通信信道的主要特点.一般地,人们根据发送信号的周期 T_s 、信号带宽 $B_s = 1/T_s$ 与多径时延扩展 T_m 和多普勒扩展 f_D 的相互关系,将多径衰落分为 4 类:平坦慢衰落、平坦快衰落、频率选择性慢衰落和频率选择性快衰落.本文主要针对瑞利平坦慢衰落信道,对 Turbo 码^[1]的译码算法 Log-MAP 在衰落信道下进行修正,并对影响 Turbo 码性能的主要参数:迭代次数、交织器长度、编码效率、分量编码器结构进行仿真分析,得出有意义的仿真结果,为设计合理的通信 Turbo 码提供参考.

1 瑞利平坦衰落信道的编码信道模型

多普勒扩展反映信道冲激响应在时域上的相关性,它的大小反映信道衰落的快慢.为了更好反映信道冲激响应随时间变化的快慢,人们定义了信道相关时间 T_{coh} , $T_{coh} = 1/f_D$. 同样的,也定义了相关带宽 B_{coh} , $B_{coh} = 1/T_m$, 来描述信道冲激响应在频域上的相关性.当 $B_s \ll B_{coh}$ 时,信号通过信道传输后,各频率分量所遭受的衰落是一致的,无码间串扰,这时信道的衰落是平坦衰落(也叫非频率选择性衰落).当 $T_s \ll T_{coh}$ 时,通常认为信道增益在整个发送符号周期内是恒定的,这时信道的衰落为慢衰落信道;反之,则为快衰落.当 $B_s > B_{coh}$, $T_s \ll T_{coh}$ 时,信道衰落为频率选择性慢衰落.当 $B_s > B_{coh}$, $T_s > T_{coh}$ 时,信道衰落为频率选择性快衰落.当发射机和接收机之间的传播路径数很多时,根据中心极限定理,接收信号的模型为复高斯随机过程.如果接收信号没有直射波分量,即复高斯变量的均值为零,则接收信号的包络服从瑞利分布:

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), r \geq 0. \quad (1)$$

2003-03-19收稿

* 广西教育厅科研项目(桂教科研[2000]392号)和广西高校百名中青年学科带头人资助计划项目(桂教人[2002]467号)

这时信道即为瑞利衰落信道。

瑞利平坦衰落信道的编码信道模型如图 1 所示。

假设采用 BPSK 调制,信道编码器的输出为

$$\{\alpha\}, \alpha \in \{0, 1\}, x_k = (2\alpha - 1) \frac{E_s}{2}$$

设 $x(t)$ 为发射信号,在接收端接收到的等效复低通信号可以表示为:

$$y(t) = T(t)e^{j\theta(t)}x(t) + n(t),$$

其中 $T(t)e^{j\theta(t)}$ 是信道时变衰落系数,为复高斯随机过程,其包络 $T(t)$ 服从瑞利分布,并且其期望值满足

$$E[a^2(t)] = 1. \text{ 相位 } \theta(t) \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 上均匀分布, } n(t) \text{ 为复加性白高斯噪声.}$$

对于慢衰落信道,接收机可以充分估计出 $T(t)e^{j\theta(t)}$ 的相位并进行补偿,接收信号经相干解调后送入匹配滤波器,故 $y(t)$ 在 k 时刻的采样值为

$$y_k = a_k x_k + n_k.$$

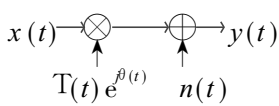


图 1 平坦慢衰落信道模型

Fig. 1 Flat-slow-fading channel model

瑞利平坦衰落信道的仿真过程如图 2 所示.对于充分交织的瑞利慢衰落信道,衰落幅度 a_k 之间互不相关,可以用瑞利随机变量来仿真,于是有

$$a = k \cdot \sqrt{a_c^2 + a_s^2},$$

式中 a_c 和 a_s 为独立同分布的高斯随机变量,其均值为 0,方差 $\sigma^2 = 1, k$ 为比例因子,为了使瑞利衰落的平均功率等于 1,取 $k = 1/\sqrt{2}$.

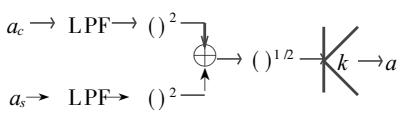


图 2 瑞利平坦衰落的仿真过程

Fig. 2 Simulation of Rayleigh fading process

2 瑞利平坦衰落信道下的 Log-Map 算法

Log-Map^[2]算法是 MAP 算法在对数域的简化,它把 MAP 算法中的乘法转化成加法,减少了运算量,但性能几乎没有变.设输入信息序列用 $d(d = d_1, d_2, \dots, d_N)$ 来表示,信息序列经过 Turbo 码编码器编码后,得到系统信息序列 $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_N^s)$ 校验序列 $x_1^p = (x_{1,1}^p, x_{1,2}^p, \dots, x_{1,N}^p)$ (RSC1 输出的校验序列) 和 $x_2^p = (x_{2,1}^p, x_{2,2}^p, \dots, x_{2,N}^p)$ (RSC2 输出的校验序列). 信息序列和校验序列经过 BPSK 调制后发送,在接收端相应的接收序列为 $y_i^N = (y^s, y^p)$. 对于充分交织的瑞利衰落信道,每一信息比特位的对数似然比表示为:

$$\Lambda(d_k) = \log \left[\frac{P(d_k = 1 | y_1^N, a^s, d^p)}{P(d_k = 0 | y_1^N, a^s, d^p)} \right] =$$

$$\log \left[\frac{P(d_k = 1, a^s, d^p | y_1^N)}{P(d_k = 0, a^s, d^p | y_1^N)} \right] = \sum_s P(s_{k-1} = s', d_k = 1, a^s, d^p, y_1^N) IP(y_1^N) \log \left[\frac{\sum_s P(s_{k-1} = s', d_k = 0, a^s, d^p, y_1^N) IP(y_1^N)}{\sum_s P(s_{k-1} = s', d_k = 1, a^s, d^p, y_1^N) IP(y_1^N)} \right], \quad (2)$$

其中 a^s 和 d^p 是对应于系统位和校验位的衰落幅度. 根据 Bayes 规则和马尔可夫源的性质:

$$P(s_{k-1} = s', d_k = 1, a^s, d^p, y_1^N) = P(s_{k-1} = s', d_k = 1, a^s, d^p, y_1^{k-1}, y_k, y_{k+1}^N) = P(s_{k-1} = s', y_1^{k-1}) P(d_k = 1, a^s, d^p, y_k, y_{k+1}^N | s_{k-1} = s') = P(s_{k-1} = s', y_1^{k-1}) P(y_{k+1}^N | s_{k-1} = s', d_k = 1, y_k) P(d_k = 1, a^s, d^p, y_k | s_{k-1} = s') = P(s_{k-1} = s', y_1^{k-1}) P(y_{k+1}^N | s_{k-1} = s') P(d_k = 1, a^s, d^p, y_k | s_{k-1} = s'), \quad (3)$$

定义: $T_k(s) = P(s_k = s, y_1^k), U_k(s) = P(y_{k+1}^N | s_k = s), V_k(s', s) = P(d_k = i, a_k^s, d_k^p, y_k | s_{k-1} = s'), i = 0, 1.$

从上面的推导和定义可知,在衰落信道下 $T_k(s)$ 和 $U_k(s)$ 的定义表达式与在高斯白噪声下的表达式一样,只需修正 $V_k(s', s)$.

$$V_k(s', s) = P(d_k = i, a_k^s, d_k^p, y_k | s_{k-1} = s') = P(s_k = s, y_k | s_{k-1} = s', a_k^s, d_k^p) = P(s_k = s | s_{k-1} = s') P(y_k^s, y_k^p | s_k = s, s_{k-1} = s', a_k^s, d_k^p) = P(d_k) P(y_k^s | d_k, a_k^s) P(y_k^p | x_k^p, d_k^p). \quad (4)$$

如果接收机未知信道状态信息,则分支转移概率 $V_k(s', s)$ 为:

$$V_k(s', s) = P(d_k) P(y_k^s | d_k) P(y_k^p | x_k^p),$$

其中, $P(d_k)$ 是 d_k 的先验概率, $P(y_k^s | d_k, a_k^s)$ 和 $P(y_k^p | x_k^p, d_k^p)$ 服从高斯概率分布, $P(y_k^s | d_k)$ 和 $P(y_k^p | x_k^p)$ 分别是由 $P(y_k^s | d_k, a_k^s)$ 和 $P(y_k^p | d_k, d_k^p)$ 在瑞利衰落幅度 a_k 上取统计平均获得. 有

$$P(d_k = i) = P(d_k = i | s_k = s, s_{k-1} = s') P(s_k = s | s_{k-1} = s'), \quad (5)$$

$$P(y_k^s | d_k, a_k^s) \cdot P(y_k^p | x_k^p, d_k^p) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_k^s - a_k^s(2x_k^s - 1)]^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [y_k^p - d_k^p(2x_k^p - 1)]^2\right\} = B \exp\left\{\frac{2(a_k^s y_k^s x_k^s + d_k^p y_k^p x_k^p)}{\sigma^2}\right\}, \quad (6)$$

B 为常量. 忽略 $P(y_k^s | d_k)$ 和 $P(y_k^p | x_k^p)$ 的下标, 有

$$p(y | x) = \int_a p_a(a) \cdot p(y | a, x) da = \int_0^\infty 2a e^{-a^2} \left[\frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{(y-ax)^2}{2\sigma^2}} \right] da, \quad (7)$$

式中, $p_a(a)$ 是瑞利密度函数, $p(y | a, x)$ 是均值为 $a \cdot x$, 方差为 σ^2 的条件高斯. 上式计算非常复杂, 1 种简化计算方法是: 假定 $p(y | x)$ 是高斯分布, 则有

$$p(y | x) \propto \exp(E_A(a)xy / N\sigma^2). \quad (8)$$

在一般仿真情况下,假定瑞利衰落的平均能量

为 1, 于是 $E_A(a) = 0.8862^{[3]}$. 在对数域里, 修正后的状态转移概率为

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) &= \ln \mathcal{V}_i((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) = \\ &= \frac{2E_A(a)y_k^s x_k^s(i)}{N_0} + \frac{2E_A(a)y_k^p x_k^p(i, s_{k-1}, s_k)}{N_0} + \ln P(d_k \\ &= i) + k, \end{aligned}$$

k 为常量.

$$\begin{cases} \ln P(d_k = 1) = L(d_k) - \ln(1 + e^{L(d_k)}), \\ \quad \text{当 } P(d_k = 1 | s_k = s, s_{k-1} = s') = 1, \\ \ln P(d_k = 0) = -\ln(1 + e^{L(d_k)}), \\ \quad \text{当 } P(d_k = 0 | s_k = s, s_{k-1} = s') = 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k(s_k) &= \ln \mathcal{T}_k(s_k) = \max_{(s_{k-1}^s, i)}^* (\mathcal{V}_i((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) \\ &+ \mathcal{T}_{k-1}(s_{k-1})) - \max_{(s_{k-1}^s, i)}^* (\mathcal{V}_i((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) + \\ &\mathcal{T}_{k-1}(s_{k-1})), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}_k(s_k) &= \ln \tilde{\mathcal{U}}_k(s_k) = \max^* (\mathcal{V}_i((y_{k+1}^s, y_{k+1}^p), s_k, \\ &s_{k+1}) + \tilde{\mathcal{U}}_{k+1}(s_{k+1})) - \max^* (\mathcal{V}_i((y_{k+1}^s, y_{k+1}^p), s_k, s_{k+1}) \\ &+ \mathcal{T}_k(s_k)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\max^* (W_1, W_2) = \ln(e^{W_1} + e^{W_2}) = \max(W_1, W_2) + \ln(1 + e^{-|W_2 - W_1|})^{[4]}$$

经修正后, 信息比特 d_k 的后验概率对数似然比为

$$\begin{aligned} \Lambda(d_k) &= \max_{(s_k, s_{k-1})}^* (\mathcal{V}_i((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) + \\ &\mathcal{T}_{k-1}(s_{k-1}) + \tilde{\mathcal{U}}_k(k)) - \max_{(s_k, s_{k-1})}^* (\mathcal{V}_0((y_k^s, y_k^p), s_{k-1}, s_k) \\ &+ \mathcal{T}_{k-1}(s_{k-1}) + \tilde{\mathcal{U}}_k(k)). \end{aligned} \quad (11)$$

3 仿真结果

基于以上建立的模型, 我们采用修正后的 Log-MAP 算法, 交织器采用随机交织器, 对影响 Turbo 码性能的主要参数: 迭代次数、交织器长度、编码效率、分量编码器结构进行了仿真. 为了比较 Turbo 码在衰落信道和高斯白噪声信道下的性能, 我们给出如图 3 的仿真结果, 生成矩阵 $g = (7, 5)$, 码率 $R = 1/3$, 交织长度 $N = 500$, 迭代次数 $n = 5$. 从图 3 可以看出, 在衰落信道下 Turbo 码的性能比在 AWGN 信道下的性能大约差 1.5~2.5dB. 在未编码的数字通信系统中, 要想使误比特率 $B = 10^{-5}$, 信噪比至少为 44dB^[5]. 因此, 相比于未编码, Turbo 码有将近 40dB 的编码增益.

图 4 给出译码迭代次数对 Turbo 码性能影响曲线, $g = (7, 5)$, $R = 1/3$, $N = 500$. 从图 4 可以看出, 当信噪比小于 2dB 时, Turbo 码的译码性能并没有随着迭代次数的增加而得到明显改善, 这是由于信道衰落幅度较大, 传输的数据受到严重破坏, 超出了

Turbo 码的纠错能力, 此时, 只有通过提高信噪比来增强系统的抗衰落能力. 当信噪比大于 2dB 时, 误比特率随着迭代次数的增加明显减小, 同时译码时延也增加. 但是, 经过 4~5 次迭代后, 误比特率下降开始变得缓慢. 这是因为随着迭代次数的增加, 外信息的相关性越来越大, 提供的有用信息越来越少, 性能改善也越来越小, 这时称循环迭代次数达到饱和. 一般迭代 5~10 次趋于饱和^[6].

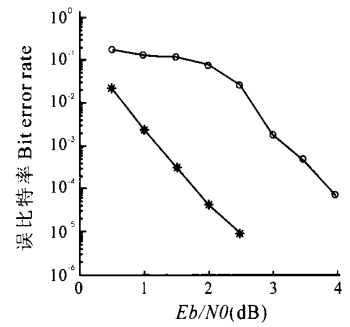


图 3 Turbo 码在衰落信道和 AWGN 信道下的性能比较
Fig. 3 Performance of Turbo codes over AWGN channels and fading channels

○: 衰落信道; * : AWGN 信道.
○: Fading channels; * : AWGN channels.

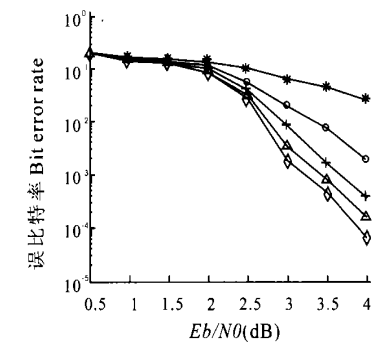


图 4 迭代次数的影响
Fig. 4 Effects of iteration number

* : $n = 1$; ○ : $n = 2$; + : $n = 3$
△ : $n = 4$; ◇ : $n = 5$.

图 5 给出不同 RSC 结构对 Turbo 码性能影响曲线, $N = 1140$, $R = 1/3$, $n = 5$. 从图 5 看出, 当信噪比小于 2dB 时, 生成多项式为 $g = (7, 5)$ 的译码性能比 $g = (31, 27)$ 的性能略好, 但随着信噪比的增加, $g = (31, 27)$ 的译码性能明显优于前者. 这与 RSC 码的特点有关, 其特点是, 当前码元的生成与当前时刻之前的所有码元有关系, 所以约束长度越长, 信息关联程度越大, 译码性能就越好. $g = (31, 27)$ 的 RSC 码的约束长度为 5, $g = (7, 5)$ 的 RSC 码的约束长度为 3, 因此, 在信噪比较高时, 前者的性能比后者好. RSC 码的另一特点是, 其译码复杂度和运算量随着约束长度的增加呈指数增加. 所以在选择 RSC 结构时, 不宜选择约束长度太长, 一般取

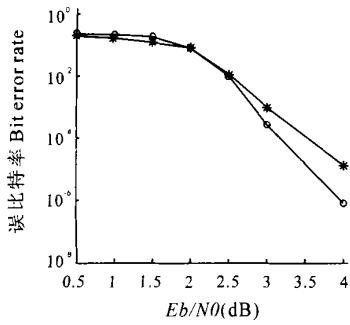


图 5 RSC结构的影响

Fig. 5 Effects of RSC structure

-*-: $g = (7, 5)$; \circ : $g = (31, 27)$.

交织器在 Turbo码中起着极其重要的作用, 交织器的交织方式、交织长度对 Turbo码的性能都有一定的影响, 特别是交织长度, 文献 [7]指出 Turbo码性能随着交织长度的增加而提高, 但每个信息比特的译码复杂性却不随交织长度的改变而改变. 正是这个原因使得 Turbo码, 特别在大的帧长条件下, 是一种强有力的编码方式. 图 6给出了不同交织长度对 Turbo码性能的影响曲线, $g = (7, 5), R = 1/3, n = 5$. 当信噪比大于 2dB, 交织长度 $N = 1140$ 时, Turbo码的译码性能比 $N = 500$ 的性能要好, 这是由于交织长度越长, 2个相邻信息位的相关性越小. 但由于交织器的存在, 使得译码器必须接收完整信息序列后才开始译码, 于是随着交织长度的增大, 译码延时将随之线性增加, 译码所需的存储量也增加. 因此, 交织长度不能选得太长, 应视不同的业务需求作出折衷选择.

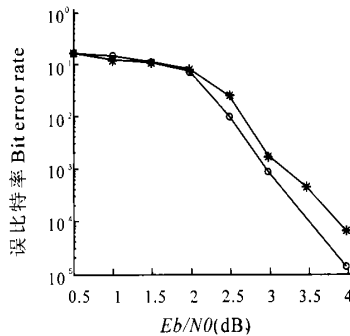


图 6 交织长度的影响

Fig. 6 Effects of block length

-*-: $N = 500$; \circ : $N = 1140$.

打孔起着调整码率的作用, 以适应不同码率需求的场合. 图 7给出码率分别为 1/2和 1/3的 Turbo码的性能曲线, $g = (7, 5), N = 500, n = 4$. 从图 7可看出, 后者的性能明显优于前者. 这是由于交织器的存在, 导致监督位对信息位的保护失衡, 即有些信

息位的监督位在打孔时全部被丢掉, 而有些则保留了过多的监督位.

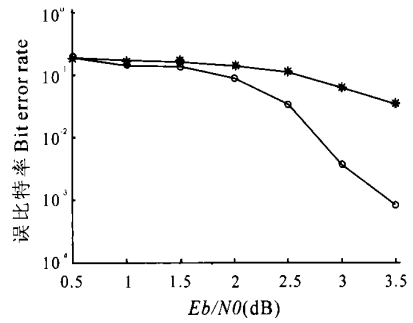


图 7 不同码率的影响

Fig. 7 Effects of different coding rate

-*-: $R = 1/2$; \circ : $R = 1/3$.

4 结束语

从以上的仿真结果可知, 在无线衰落信道中, Turbo码有很强的抗衰落和抗多径效应能力, 它作为一种性能强大的纠错码, 在包括移动通信在内的诸多通信领域之中都有着非常诱人的应用前景. 本文对影响 Turbo码性能的一些主要参数进行仿真得到的结果, 对如何设计适合于无线信道的 Turbo码有一定的参考价值, 可以通过选择不同的参数来使 Turbo码满足各种不同业务需求.

参考文献

- 1 Berrou C, Glavieux A, Thitimajshima P. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding Turbo codes. Proc of ICC, 1993, 1064- 1070.
- 2 Robertson P, Hoher P, Villebrum E. Optimal and sub-optimal maximum a posteriori algorithms suitable for turbo decoding. European Trans On Telecommun. 1997, (8): 119- 125.
- 3 Hall E K, Wilson S G. Design and analysis of Turbo codes on Rayleigh fading channels. IEEE J of Select Areas in Commun, 1998, 16(2): 160- 174.
- 4 Wu Y F. Design and implementation of parallel and serial concatenated convolutional codes. Virginia Tech, 1999.
- 5 Wilson S. Digital Modulation and Coding. Prentice Hall, 1996.
- 6 覃团发, 黄旭方, 陈跃波. 基于 AWGN信道下 Turbo码的性能仿真及分析. 广西科学, 2003, 10(2): 94- 96, 106.
- 7 Benedetto S, Montorsi G. Unveiling Turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(2): 409- 429.

(责任编辑: 邓大玉 曾蔚茹)