DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.04.003
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (4): 249~252

局部凸空间的一致光滑性*
Uniform Smoothness of Locally Convex Spaces

程庆进　魏文展　王翠玲**　董　鸽
Cheng Qingjin　Wei Wenzhan　Wang Cuiling　Dong Ge

(广西师范学院数学系　南宁市明秀东路　530001)
(Dept. of Math., Guangxi Teachers University, Mingxiudonglu, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要　给出局部凸空间一致光滑的一个充分条件.
关键词　局部凸空间　一致光滑性　充分条件
中图法分类号　O177.3

Abstract　In this paper, we give a sufficient condition of uniform smoothness in locally convex spaces.

Key words　locally convex spaces, uniform smoothness, sufficient condition

赵俊峰,路万忠在文献 [1]给出了 Banach空间一致光滑的一个充要条件,文献 [2]将文献 [3,4]的结果推广到局部凸空间.在上述文献的基础上,本文将文献 [1]定理 1的充分性推广到局部凸空间,并纠正了文献 [2]一个主要定理证明的不妥之处.

设 (E,P)为实局部凸的拓扑线性空间,P为 E的一个生成拓扑的半范族,对偶空间为 E',$\forall p\in P$,E'中关于半范 p连续的线性泛函全体记为,$E_p^* = \{f\in E', \sup\limits_{p(x)\leqslant 1}|f(x)| <+\infty\}$,则由 Alaoglu-Bourbaki定理可知 E_p^* 为 E' 的子空间,且按范数 $\|f\|_p = \sup\limits_{p(x)\leqslant 1}|f(x)|$ 成为 Banach空间,记 $S(E_p^*) = \{f\in E_p^*, \|f\|_p = 1\}$,$S_p(E) = \{x\in E, p(x) = 1\}$,$U_p(E) = \{x\in E, p(x)\leqslant 1\}$,注意到 U_p为 E中具有非空开核的闭凸均衡吸收集,因而 $\forall x\in S_p(E)$,存在 $f\in S(E_p^*)$,使 $f(x) = 1$,易知文献 [5]中给出的局部凸空间一致光滑的等价定义如下.

定义 1　实局部凸空间 (E,P)称为一致光滑的,若 $\forall p\in P$,$\forall$ X>0,$\exists$ W>0,使得当 $x\in S_p(E)$,$y\in E$且 $0< p(y) <$ W时,$(p(x+y)+p(x-y)-2)/p(y) <$ X.

注 1　不难看出定义 1又等价于如此陈述,实局部凸空间 (E,P)成为一致光滑的,若 $\forall p\in P$,$\forall$ X>0,$\exists$ W>0使得当 $0<\lambda<$ W时,$\forall x,y\in S_p(E)$有 $(p(x+\lambda y)+p(x-\lambda y)-2)/\lambda <$ X.

定理 1　(E,P)为实局部凸空间则下列等价

(i) (E,P)为一致光滑;

(ii) $\forall p\in P$,$\forall \{x_n^*\}\subset S_p(X^*)$ 及 $\{y_n^*\}\subset S_p(E^*)$和 $\{x_n\}\subset S_p(E)$,若 $x_n^*(x_n)\to 1$,$y_n^*(x_n)\to 1$,则 $\|x_n^* - y_n^*\|_p\to 0$.

(i) ⇒ (ii) 的证明.

$\forall p\in P$,$\forall \{x_n^*\}\subset S_p(E^*)$及 $\{y_n^*\}\subset S_p(E^*)$和 $\{x_n\}\subset S_p(E)$使 $x_n^*(x_n)\to 1$,$y_n^*(x_n)\to 1$,由 (i)成立知,对上面的 $p\in P$及 $\forall$ X>0,$\exists$ W>0,当 $0<\lambda<$ W时,有 $(p(x+\lambda y)+p(x-\lambda y)-2)/\lambda <$ X$/4$.对一切 $x\in S_p(E)$,$y\in S_p(E)$均成立.特别对 $\{x_n\}\subset S_p(E)$亦有 $(p(x_n+\lambda y)+p(x_n-\lambda y)-2)/\lambda <$ X$/3$

取 $0<\lambda<\min($X,W$)$则 $\exists N>0$当 $n>N$时,有

$$\left|\frac{x_n^*(x_n)-1}{\lambda}\right| < \frac{\lambda}{3},\ \left|\frac{y_n^*(x_n)-1}{\lambda}\right| < \frac{\lambda}{3}$$

且

$$x_n^*(x_n)+\lambda x_n^*(y) > 0,\ y_n^*(x_n)-\lambda y_n^*(y) > 0, \tag{1}$$

则当 $n>N$时,有

$$\frac{p(x_n+\lambda y)+p(x_n-\lambda y)-2}{\lambda}\geqslant$$

$$\frac{|x_n^*(x_n+\lambda y)|+|y_n^*(x_n-\lambda y)|-2}{\lambda}=$$

$$\frac{x_n^*(x_n)+\lambda x_n^*(y)+y_n^*(x_n)-\lambda y_n^*(y)-2}{\lambda}=$$

$$\frac{x_n^*(x_n)-1}{\lambda}+\frac{y_n^*(x_n)-1}{\lambda}+(x_n^*-y_n^*)(y), \tag{2}$$

2003-07-11收稿.
* 广西自然科学基金资助项目 (0135002).
** 西安交通大学理学院,陕西西安,710049. (Sciences Coll., Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi, 710049).

则

$$(x_n^* - y_n^*)(y) \leqslant \frac{p(x_n+\lambda y)+p(x_n-\lambda y)-2}{\lambda} + \left|\frac{x_n^*(x_n)-1}{\lambda}\right| + \left|\frac{y_n^*(x_n)-1}{\lambda}\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\lambda}{3}+\frac{\lambda}{3} < \varepsilon, \qquad (3)$$

交换(1)(2)(3)中 x_n^*, y_n^* 的位置便得

$$(y_n^* - x_n^*)(y) < \varepsilon, \qquad (4)$$

从而

$$|(x_n^* - y_n^*)(y)| < \varepsilon, \qquad (5)$$

再由 $y\in S_p(E)$ 的任意性便得 $\|x_n^*-y_n^*\|_p \leqslant \varepsilon$,从而 $\|x_n^*-y_n^*\|_p \to 0, (n\to\infty)$.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) 的证明.

反之则 $\exists p\in P$,及 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_k\}\subset S_p(E)$,$\{y_k\}\subset S_p(E)$ 和 $\lambda_k\to 0(\lambda_k>0)(k=1,2,\cdots)$ 使

$$\frac{p(x_k+\lambda_k y_k)+p(x_k-\lambda_k y_k)-2}{\lambda_k}\geqslant \varepsilon_0, \qquad (6)$$

而对于每个 $\lambda_k>0$,存在 $x_k^*, y_k^* \in S_p(E^*)$ 使

$$x_k^*(x_k)+\lambda_k x_k^*(y_k) = x_k^*(x_k+\lambda_k y_k) > p(x_k+\lambda_k y_k)-\lambda_k^2, \qquad (7)$$

$$y_k^*(x_k)+\lambda_k y_k^*(y_k) = y_k^*(x_k-\lambda_k y_k) > p(x_k-\lambda_k y_k)-\lambda_k^2, \qquad (8)$$

由(7)和(8)可得

$$p(x_k+\lambda_k y_k)+p(x_k-\lambda_k y_k)-2\lambda_k^2 < (x_k^*+y_k^*)(x_k)+\lambda_k(x_k^*-y_k^*)(y_k)\leqslant 2+\lambda_k(x_k^*-y_k^*)(y_k), \qquad (9)$$

由(6)和(9)可得

$$2+\lambda_k\varepsilon_0-2\lambda_k^2 < p(x_k+\lambda_k y_k)+p(x_k-\lambda_k y_k)-2\lambda_k^2 < (x_k^*+y_k^*)(x_k)+\lambda_k(x_k^*-y_k^*)(y_k)\leqslant 2+\lambda_k(x_k^*-y_k^*)(y_k),$$

从而

$$\varepsilon_0-2\lambda_k < (x_k^*-y_k^*)(y_k)\leqslant \|x_k^*-y_k^*\|_p, \qquad (10)$$

则

$$\varliminf_{k\to\infty}\|x_k^*-y_k^*\|_p \geqslant \varepsilon_0>0, \qquad (11)$$

而由(7),(8)易知 $x_k^*(x_k)\to 1, y_k^*(x_k)\to 1(k\to\infty)$,由(ii)成立知,$\|x_k^*-y_k^*\|_p\to 0$,这与(11)矛盾,从而(ii)$\Rightarrow$(i)成立.

仿文献[2]定理4证明,我们不难得到

引理1 $\forall p\in P$,若 $\varepsilon>0$,$f,g\in S(E_p^*)$,且当 $x\in f^{-1}(0)\cap S_p(E)$ 时,$|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$,则或者 $\|f-g\|_p\leqslant\varepsilon$,或者 $\|f+g\|_p\leqslant\varepsilon$,其中 $f^{-1}(0)=\{x\in E|\ f(x)=0\}$.

定理2 设 (E,P) 为实局部凸空间,则 (E,P) 一致光滑的充分条件为 $\forall p\in P$ 有

$$\lim_{r\to 0^+}\sup_{u,v\in S_p(E),0<P(u-v)<r}\frac{1-p(\frac{u+v}{2})}{p(u-v)}=0.$$

证明 充分性 由定理1知仅只需证明 $\forall p\in P$ 及 $\forall\{x_n^*\},\{y_n^*\}\subset S_p(E_p^*)$,$\{x_n\}\subset S_p(E)$,当 $x_n^*(x_n)\to 1, y_n^*(x_n)\to 1$ 时有 $\|x_n^*-y_n^*\|_p\to 0(k\to\infty)$. 否则,则 $\exists p\in P$ 及 $0<\varepsilon_0<1$,及 $\{x_n^*\},\{y_n^*\}\subset S(E_p^*)$,$\{x_n\}\subset S_p(E)$. 虽有 $x_n^*(x_n)>1-\frac{1}{n^2}$,$y_n^*(x_n)>1-\frac{1}{n^2}$,但 $\|x_n^*-y_n^*\|_p\geqslant\varepsilon_0>0$. 令 $F_n=\frac{1}{2}(x_n^*+y_n^*)$,则 $F_n(x_n)>1-\frac{1}{n^2}$ 且 $\|F_n\|\to 1(n\to\infty)$,则 $\exists F_n$ 的子列仍记为 F_n 及某个 $k>0$,$y_n\in S_p(E)$ 使 $F_n(y_n)=0$,$x_n^*(y_n)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{k}(n=1,2,\cdots)$. 若非则对 $\forall k>0$,当 n 充分大时,有 $x_n^*(x)<\frac{\varepsilon_0}{k}$,$\forall x\in F_n^{-1}(0)\cap S_p(E)$. 则由引理1,注1知,或者 $\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-x_n^*\|_p\leqslant\frac{2\varepsilon_0}{k}$,或者 $\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-x_n^*\|_p\leqslant\frac{2\varepsilon_0}{k}$ 由 k 的任意性知,等价地有或者

$$\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-x_n^*\|_p\to 0,(n\to\infty) \qquad (12)$$

或者

$$\|\frac{F_n}{\|F_n\|}-x_n^*\|_p\to 0,(n\to\infty), \qquad (13)$$

若(12)成立,但 $\|\frac{F_n}{\|F_n\|_p}-x_n^*\|_p=\|\frac{F_n-\|F_n\|_p x_n^*}{\|F_n\|_p}\|_p\geqslant\frac{1}{2}\|y_n^*-x_n^*\|_p-(1-\|F_n\|_p)\|x_n^*\|_p$.

再由 $\|y_n^*-x_n^*\|_p\geqslant\varepsilon_0$,$\|F_n\|\to 1$ 知 $\|\frac{F_n}{\|F_n\|_p}-x_n^*\|_p\not\to 0$ 与(12)矛盾.

若(13)成立,而 $\|\frac{F_n}{\|F_n\|_p}+x_n^*\|_p=\|\frac{F_n+x_n^*+x_n^*(\|F_n\|_p-1)}{\|F_n\|_p}\|_p\geqslant(F_n+x_n^*)(x_n)-(1-\|F_n\|_p)\geqslant 2-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^2}>1$ 也矛盾.

故上述常数 k 存在.

$$令\ u_n=\frac{x_n+\frac{1}{n}y_n}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)},\ v_n=\frac{x_n-\frac{1}{n}y_n}{p(x_n-\frac{1}{n}y_n)},$$

则 $p(u_n)=p(v_n)=1$,且

$$p(x_n+\frac{1}{n}y_n)\geqslant x_n^*(x_n+\frac{1}{n}y_n)>(1-\frac{1}{n^2})+\frac{\varepsilon_0}{nk}, \qquad (14)$$

$$p(x_n - \frac{1}{n}y_n) \geqslant y_n^*(x_n - \frac{1}{n}y_n) > (1-\frac{1}{n^2}) + \frac{\varepsilon_0}{nk}, \tag{15}$$

则 ∃ $N>0$ 使 $n>N$ 时有 $\frac{\varepsilon_0}{nk} - \frac{1}{n^2} > \frac{\varepsilon_0}{2nk}$ 于是由(14),(15)知

$$p(x_n + \frac{1}{n}y_n) > 1 + \frac{\varepsilon_0}{2nk} > 1, \tag{16}$$

$$p(x_n - \frac{1}{n}y_n) > 1 + \frac{\varepsilon_0}{2nk}, \tag{17}$$

又

$$p(u_n - v_n) \leqslant p(\frac{x_n+\frac{1}{n}y_n}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)} - (x_n + \frac{1}{n}y_n)) + p((x_n+\frac{1}{n}y_n) - x_n) \leqslant p(x_n+\frac{1}{n}y_n)\left|\frac{1}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)} - 1\right| + \frac{1}{n} \leqslant |p(x_n+\frac{1}{n}y_n) - 1| + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n},$$

类似可得 $p(v_n - x_n) \leqslant \frac{2}{n}$,故

$$p(u_n - v_n) \leqslant \frac{4}{n}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}p(u_n + v_n) = \frac{1}{2}p((\frac{1}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)} + \frac{1}{p(x_n-\frac{1}{n}y_n)})x_n + \frac{1}{n}(\frac{1}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)} - \frac{1}{p(x_n-\frac{1}{n}y_n)})y_n) \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{p(x_n+\frac{1}{n}y_n)} + \frac{1}{p(x_n-\frac{1}{n}y_n)}) + \frac{1}{2n}|p(x_n-\frac{1}{n}y_n) - p(x_n+\frac{1}{n}y_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_0}{2nk}}) + \frac{1}{n^2}, \tag{19}$$

(由 $1 \leqslant p(x_n \pm \frac{1}{n}y_n) \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ 知 $-\frac{1}{n} < p(x_n - \frac{1}{n}y_n) - p(x_n + \frac{1}{n}y_n) < \frac{1}{n}$ 再由(16),(17)便知(19)成立.)从而

$$\frac{1 - p(\frac{u_n+v_n}{2})}{p(u_n - v_n)} \geqslant \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\frac{\varepsilon_0}{2nk})} - \frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n}} = \frac{\varepsilon_0}{8}\frac{1}{2k+\frac{\varepsilon_0}{n}} - \frac{1}{4n} > \frac{\varepsilon_0}{64k}, (n \to \infty). \tag{20}$$

下面说明对上面的 u_n, v_n 一定存在 $\{u_n - v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列,不妨仍记为 $\{u_n - v_n\}_{n=1}^{\infty}$,使

$$p(u_n - v_n) > 0, (n = 1, 2, \cdots).$$

由于 $\forall \varepsilon > 0$,有 $p(\frac{u_n - v_n}{p(u_n - v_n) + \varepsilon}) \leqslant 1$,故 $\frac{u_n - v_n}{p(u_n - v_n) + \varepsilon} \in U_p(E)$,则 $|x_n^*((u_n - v_n)/(p(u_n - v_n) + \varepsilon))| \leqslant \sup_{p(x)\leqslant 1}|x_n^*| = \|x_n^*\|_p = 1$,知 $|x_n^*(u_n - v_n)| \leqslant p(u_n - v_n) + \varepsilon$,由 ε 的任意性知 $|x_n^*(u_n - v_n)| \leqslant p(u_n - v_n)$,同理 $|y_n^*(u_n - v_n)| \leqslant p(u_n - v_n)$,从而

$$p(u_n - v_n) \geqslant \frac{1}{2}(|x_n^*(u_n - v_n)| + |y_n^*(u_n - v_n)|),$$

令 $Q_n = \frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)} - \frac{1}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)}$.

(i) 若 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在子序列,不妨仍记为 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$,使 $Q_n \geqslant 0 (n = 1, 2, \cdots)$,则

$$p(u_n - v_n) \geqslant \frac{1}{2}|x_n^*(u_n - v_n)| \geqslant \frac{1}{2}x_n^*(u_n - v_n) = x_n^*(\frac{x_n + \frac{1}{n}y_n}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)} - \frac{x_n - \frac{1}{n}y_n}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)}) = x_n^*(x_n)Q_n + \frac{x_n^*(y_n)}{n}(\frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)} + \frac{1}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)}) \geqslant (1 - \frac{1}{n^2})Q_n + \frac{\varepsilon_0}{nk}(\frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n) + p(x_n - \frac{1}{n}y_n)}) > 0.$$

(ii) 反之,则 ∃ $N > 0$,使 $n > N$ 时,恒有 $Q_n \leqslant 0$,则当 $n > N$ 时,

$$p(u_n - v_n) \geqslant \frac{1}{2}|y_n^*(u_n - v_n)| \geqslant \frac{1}{2}y_n^*(u_n - v_n) = \frac{1}{2}y_n^*(\frac{x_n - \frac{1}{n}y_n}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)} - \frac{x_n + \frac{1}{n}y_n}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)}) = \frac{1}{2}y_n^*(x_n)(\frac{1}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)} - \frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)}) - \frac{1}{2}\frac{y_n^*(y_n)}{n}(\frac{1}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)} + \frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)}) \geqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2})(-Q_n) + \frac{\varepsilon_0}{nk}(\frac{1}{p(x_n - \frac{1}{n}y_n)} + \frac{1}{p(x_n + \frac{1}{n}y_n)}) > 0.$$

(上式用到 $y_n^*(y_n) = -x_n^*(y_n) \leqslant -\frac{\varepsilon_0}{k}$)

从而一定存在 $\{u_n - v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列,仍记为 $\{u_n - v_n\}_{n=1}^{\infty}$,使 $p(u_n - v_n) > 0$. 再由(18)(20)便知与题设矛盾.

注 2 文献[2]定理 6(沿用原文记号)最后在证

明 $p(y_n - z_n) > 0$时作者如下证明,由于 $f_n(x_0) \to 1 = f(x_0)$,因此对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$时 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$故

$$p(y_n - z_n) \geqslant \frac{a_n}{n}\left(\frac{1}{p(x_0 + \frac{x_n}{n})} + \frac{1}{p(x_0 - \frac{x_n}{n})}\right) - \left|\frac{1}{p(x_0 + \frac{x_n}{n})} - \frac{1}{p(x_0 - \frac{x_n}{n})}\right| \varepsilon, \tag{21}$$

由 ε的任意性便得出 $p(y_n - z_n) > 0$. 但我们注意到,对每个取定 ε和适合条件的 n,并不能判断(21)大于等于号右方式子的正负性,也就无法由 ε的任意性推知 $p(y_n - z_n) > 0$. 但仿照本文在证明 $p(u_n - v_n) > 0$的方法可证得 $p(y_n - z_n) > 0$. 因而原文结论仍然成立.

参考文献

1 赵俊峰,路万忠. Banach空间一致光滑的一个等价条件. 数学物理学报, 1993, 13(2): 201~203.

2 陈珠明,林宗振.局部凸空间光滑的充分条件.暨南大学学报, 1996, 17(1): 17~23.

3 陈道琦.支撑泛函唯一的一个充分条件.数学学报, 1982, 25(3): 302.

4 俞鑫泰.泛数 Frechet可微的一个充分条件—— 关于“支撑泛函唯一的一个充分条件”.数学进展, 1986, 15(2): 211.

5 王 炜.局部凸空间的光滑性.辽宁师范大学学报, 1999, 22(4): 272~275.

6 吴从炘,周 起.局部凸空间的一致凸性.数学年刊, 1990, 11A: 351~354.

7 Diestel J. Geometry of Banach spaces-selected topics, Lecture Notes in Math, Springer Verlag, 1975.

8 俞鑫泰. Banach空间的几何理论.上海:华东师范大学出版社, 1986.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 248页 Continue from page 248)

(Ⅳ)与(Ⅲ)的证明类似即可证明(Ⅳ).

记 $V_T(m)$为 CA-232$_{U-U}(m)$的 T-循环个数, $V_T^{a-b}(m)$为固定边界条件 $a-b$下 CA-232$_{a-b}(m)$的 T-循环个数,$(a,b \in \{0,1\})$.

定理 6 (Ⅰ) CA-232$_{U-U}(m)$,$(m \geqslant 4)$的不动点个数为:

$V_1(m) = 2V_1^{0-0}(m-2) + 2V_1^{0-1}(m-4) = 2V_1^{1-1}(m-2) + 2V_1^{1-0}(m-4) = 2V_1^{0-0}(m-2) + 2V_1^{1-0}(m-4) = 2V_1^{1-1}(m-2) + 2V_1^{0-1}(m-4)$;

(Ⅱ) CA-232$_{U-U}(m)$中 2-循环的个数为

$$r_2^c(m) = \begin{cases} 0, m\text{为奇数}, \\ 1, m\text{为偶数}. \end{cases}$$

证明 (Ⅰ)由引理 14知 $V_1(m) = V_1^{0-0}(m-2) + V_1^{1-1}(m-2) + V_1^{0-1}(m-4) + V_1^{1-0}(m-4)$,又由定理 4知 $V_1^{0-0}(m-2) = V_1^{1-1}(m-2)$, $V_1^{0-1}(m-4) = V_1^{1-0}(m-4)$结论成立.

(Ⅱ)由推论 4直接得到.

参考文献

1 Wolfram S. Theory and Application of Cellular Automata, Singapore: World Scientific, 1986.

2 Kawahara Y, Kumamote S, Mizoguchi Y, et al.. Period lengths of cellular automata on square lattices with rule 90. J Math Phys, 1995, 36(3): 1435~1456.

3 Lee H, Kawahara Y. On dynamical behaviors of cellular automata with linear rule 60. Bulletin of Informatics and Cybernetics, 1992, (25): 22~27.

4 Sato T. On behaviors of cellular automata with rule 27. Kyushu J Math, 1996, (50): 133~152.

5 Inokuchi S. On behaviors of cellular automata with rule 156. Bulletin of Informations and Cybernetics, 1998, 30(1): 121~131.

6 Inokuchi S. On behaviors of cellular automata with rule 14 and 142. Http://citeseer.nj.nec.com/51143.html. 1999-02-01.

7 Ramon Alonso-Sanz, Martin M. One-dimension cellular automata with memory. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(1): 205~226.

8 Martin B. A group interpretation of particles generated by one-dimensional cellular automaton wolfram's rule 54. International Journal of Modern Physics C, 2000, 11(1): 101~123.

(责任编辑:黎贞崇)