DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (4): 258~ 261

利用固定矩阵计算亏损矩阵的幂级数之和

The Sum Of the Defective Matrix Power Series by the Regular Matrix

李大林
Li Dalin

(柳州职业技术学院基础部 柳州 545006)
(Dept. for Basic Courses, Liuzhou Vocational & Tech. Coll., Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要 通过方阵 A 的极小多项式 $h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 的指数来定义可变系数向量 $V(m)$,并构成 A 的固定矩阵 D.利用固定矩阵 D,将计算亏损矩阵的幂级数公式 $A^m=PJ^mP^{-1}$ 改进为 $A^m=V(m)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$,免去求若当链及 P^{-1} 的步骤.
关键词 亏损矩阵 幂级数 若当链 固定矩阵
中图法分类号 O121.21

Abstract Define the transformable entries vector $V(m)$ on the basis of index of the minimal polynomial $h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$, and make up the regular matrix D. The classics formula $A^m=PJ^mP^{-1}$ is improved to $A^m=V(m)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$. Accordingly, the calculation of the Jordan chains and P^{-1} can be avoided.
Key words defective matrix, power series, Jordan chain, regular matrix

在工程技术中,常用到阶数很大的方阵的函数或矩阵幂级数,常规处理方法是将方阵化为对角形.如果该方阵为亏损矩阵,就需要求它的若当链及过渡矩阵.实际操作难度很大[1,2],本文试图解决这一问题.

设复数域上的 n 阶亏损矩阵 A 的极小多项式为 $h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为互异的特征根.$h(\lambda)$ 的次数记为 $w=\sum_{i=1}^{s}n_i$.A 的若当标准形记为 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$,其中 $J_i=\mathrm{diag}(J_{i1}(\lambda_i),J_{i2}(\lambda_i),\cdots,J_{it(i)}(\lambda_i))$ 为 λ_i 对应的若当矩阵,其中若当块

$$J_{ij}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \cdots & & \\ & \cdots & \cdots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i(j)\times n_i(j)},$$

$J_{ij}(\lambda_i)$ 的阶记为 $n_i(j)$.不妨设 $n_i(1)\leqslant\cdots\leqslant n_i(j)\leqslant\cdots\leqslant n_i(t(i))$.显然 $n_i(t(i))=n_i$.由文献[1],可找到特征向量与广义特征向量构成过渡矩阵 P,使 $A=PJP^{-1}$.设

$P=(P_1,P_2,\cdots,P_s)$,其中 $P_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{it(i)})$,$P_{ij}=(P_{ij1},P_{ij2},\cdots,P_{ijn_i(j)})$,

$J_{ij}(\lambda_i)$ 对应的若当链链长为 $n_i(j)$,满足
$AP_{ij1}=\lambda_iP_{ij1}+P_{ij2}$,$AP_{ij2}=\lambda_iP_{ij2}+P_{ij3}$,$\cdots$,$AP_{ij,n_i(j)-1}=\lambda_iP_{ij,n_i(j)-1}+P_{ij,n_i(j)}$,$AP_{ij,n_i(j)}=\lambda_iP_{ij,n_i(j)}$.

显然每条若当链的最后一个向量 $P_{ij,n_i(j)}$ 为特征向量,其余为广义特征向量.计算 A 的幂的公式为[3]

$A^m=P\,\mathrm{diag}(J_1^m,J_2^m,\cdots,J_s^m)P^{-1}$,其中 $J_i^m=\mathrm{diag}(J_{i1}^m(\lambda_i),J_{i2}^m(\lambda_i)\cdots,J_{it(i)}^m(\lambda_i))$,其中 $J_{ij}^m(\lambda_i)$ 如(1)式所示.

$$J_{ij}^m(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i^m & & & & & \\ C_m^1\lambda_i^{m-1} & \lambda_i^m & & & & \\ C_m^2\lambda_i^{m-2} & C_m^1\lambda_i^{m-1} & & & & \\ C_m^3\lambda_i^{m-3} & C_m^2\lambda_i^{m-2} & \cdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ C_m^{n_i(j)-1}\lambda_m^{m-n_i(j)-1} & C_m^{n_i(j)-2}\lambda_m^{m-n_i(j)-2} & \cdots & C_m^2\lambda_i^{m-2} & C_m^1\lambda_i^{m-1} & \lambda_i^m\end{bmatrix}. \tag{1}$$

2003-04-16收稿,2003-07-14修回。

用(1)式求 A 的幂,必须先求出 n 个线性无关的特征向量、广义特征向量,即找到足够的若当链构成 P,再求 P^{-1}.该方法计算量很大,即使知道 A 的标准形,要找到足够的若当链也不容易[2].本文试图寻找一种既能利用若当块 $J_{ij}^m(\lambda_i)$ 的元素的规律性,又能避免求若当链的方法.

对于给定的过渡矩阵 P,令 $P^{-1}=Q=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_s)^T$,其中 $Q_i=(Q_{i1},Q_{i2},\cdots,Q_{it(i)})^T$,$Q_{ij}=(Q_{ij1},Q_{ij2},\cdots,Q_{ijn_i(j)})^T$,则

$$A^m=P\,\mathrm{diag}(J_1^m,J_2^m,\cdots,J_s^m)P^{-1}=\sum_{i=1}^{s}P_iJ_i^mQ_i=\sum_{i=1}^{s}(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{it(i)})\,\mathrm{diag}(J_{i1}^m(\lambda_i),J_{i2}^m(\lambda_i),\cdots,J_{it(i)}^m(\lambda_i))(Q_{i1},Q_{i2},\cdots,Q_{it(i)})^T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t(i)}P_{ij}J_{ij}^m(\lambda_i)Q_{ij}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t(i)}\sum_{k=1}^{n_i(j)}\sum_{h=0}^{m}C_m^h\lambda_i^{m-h}P_{ij,k+h}Q_{ijk}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{h=0}^{m}C_m^h\lambda_i^{m-h}\cdot\left(\sum_{j=1}^{t(i)}\sum_{k=1}^{n_i(j)}P_{ij,k+h}Q_{ijk}\right),\qquad(2)$$

令 $A_i^{(h)}=\sum_{j=1}^{t(i)}\sum_{k=1}^{n_i(j)}P_{ij,k+h}Q_{ijk}$,其中 $h>m$ 时,$C_m^h=0$.当 $k+h>n_i(j)$ 时,$P_{ij,k+h}$ 不存在,故 $P_{ij,k+h}Q_{ijk}$ 不存在.又因 $n_i(1)\leqslant n_i(2)\leqslant\cdots n_i(t(i))=n_i$,故最后一个为 $A_i^{(n_i-1)}=\sum_{j=a}^{t(i)}P_{ij,1+(n_i-1)}Q_{ij1}$,其中 $n_i(a)=n_i$ 而 $n_i(a-1)<n_i$.称 $A_i^{(0)},A_i^{(1)},\cdots,A_i^{(n_i-1)}$ 为 A 的属于 λ_i 的广义特征矩阵.由(2)式,有

定理 1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 n 阶亏损矩阵 A 的互异的特征根,$A_i^{(0)},A_i^{(1)},\cdots,A_i^{(n_i-1)}$ 为 A 的属于 λ_i 的广义特征矩阵,$m\in N$,则

$$A^m=\sum_{i=1}^{s}\sum_{h=0}^{m}C_m^h\lambda_i^{m-h}A_i^{(h)},\qquad(3)$$

推论 1 $\sum_{i=1}^{s}A_i^{(0)}=E.$ (4)

证明 $\sum_{i=1}^{s}A_i^{(0)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t(i)}\sum_{k=1}^{n_i(j)}P_{ijk}Q_{ijk}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t(i)}P_{ij}Q_{ij}=\sum_{i=1}^{s}P_iQ_i=PQ=E$.证毕.

分别令 $m=0,1,\cdots,w-1$,代入(3)式(当 $m=0$ 时 $A^{\circ}=E$,见(4)式),有方程组

$$\sum_{i=1}^{s}A_i^{(0)}=E,\ \sum_{i=1}^{s}(\lambda_iA_i^{(0)}+A_i^{(1)})=A,\cdots,\ \sum_{i=1}^{s}\sum_{h=0}^{w-1}C_{w-1}^h\lambda_i^{w-1-h}A_i^{(h)}=A^{w-1},\qquad(5)$$

记 $U=(A_1^{(0)},A_1^{(1)},\cdots,A_1^{(n_1-1)},A_2^{(0)},A_2^{(1)},\cdots,A_2^{(n_2-1)},\cdots,A_s^{(0)},A_s^{(1)},\cdots,A_s^{(n_s-1)})^T$,$V(m)=(C_m^0\lambda_1^m,C_m^1\lambda_1^{m-1},\cdots,C_m^{n_1-1}\lambda_1^{m-n_1+1},C_m^0\lambda_2^m,C_m^1\lambda_2^{m-1},\cdots,C_m^{n_2-1}\lambda_2^{m-n_2+1},\cdots,C_m^0\lambda_s^m,C_m^1\lambda_s^{m-1},\cdots,C_m^{n_s-1}\lambda_s^{m-n_s+1})$(其中当 $h>m$ 时 $C_m^h=0$),则(3)式可表示为 $A^m=V(m)U$.显然 $V(m)$ 是 A^m 的次数 m 及 A 的极小多项式 $h(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 的指数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 的函数.称 $V(m)$ 为 A 的第 m 个可变系数向量.方程组(5)的系数矩阵如(6)式所示.

$$D=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\ \lambda_1&1&\cdots&0&\lambda_2&1&\cdots&0&\cdots&\lambda_s&1&\cdots&0\\ \lambda_1^2&C_2^1\lambda_1&\cdots&C_2^{n_1-1}\lambda_1^{3-n_1}&\lambda_2^2&C_2^1\lambda_2&\cdots&C_2^{n_2-1}\lambda_2^{3-n_2}&\cdots&\lambda_s^2&C_2^1\lambda_s&\cdots&C_s^{n_s-1}\lambda_s^{3-n_s}\\ \cdots&\cdots&&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots&&\cdots&\cdots&&\cdots\\ \lambda_1^{w-1}&C_{w-1}^1\lambda_1^{w-2}&\cdots&C_{w-1}^{n_1-1}\lambda_1^{w-n_1}&\lambda_2^{w-1}&C_{w-1}^2\lambda_2^{w-2}&\cdots&C_{w-1}^{n_2-1}\lambda_1^{w-n_2}&\cdots&\lambda_s^{w-1}&C_w^{n_s-1}\lambda_s^{w-2}&\cdots&C_{w-1}^{n_s-1}\lambda_s^{w-n_s}\end{bmatrix}\qquad(6)$$

式(6)可表示为 $D=(V(0),V(1),V(2),\cdots,V(w-1))^T$,称 D 为 A 的固定矩阵.

命题 1 A 的固定矩阵 D 可逆.

证明 把 D 中的列向量第1个分量为1的作为第1组,第1个分量为0而第2个分量为1的作为第2组,依此类推,因为 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_s$,所以最后一组(即第 n_s 组)的每个向量前 n_s-1 个分量为0,而第 n_s 个分量为1.显然不同两组的列向量是线性无关的.下证每一组的列向量也线性无关.对于第 i 组,设 $n_j\geqslant i$ 而 $n_{j-1}<i$,则第 i 个矩阵 D_i 为 $s-j+1$ 阶方阵,从第 i 组每个列向量的第 i 个元素(该元素为1)取起,至第 $i+s-j$ 个元素止,构成方阵 D_i.其行列式

$$|D_i|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ C_{i+1}^i\lambda_j&C_{i+1}^i\lambda_{j+1}&\cdots&C_{i+1}^i\lambda_s\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ C_{i+s-j}^i\lambda_j^{s-j}&C_{i+s-j}^i\lambda_{j+1}^{s-j}&\cdots&C_{i+s-j}^i\lambda_s^{s-j}\end{vmatrix}=C_{i+1}^i\cdots C_{i+s-j}^i\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_j&\lambda_{j+1}&\cdots&\lambda_s\\ \cdots&\cdots&&\cdots\\ \lambda_j^{s-j}&\lambda_{j+1}^{s-j}&\cdots&\lambda_s^{s-j}\end{vmatrix}.$$

因为 $\lambda_j,\lambda_{j+1},\cdots,\lambda_s$ 互异,故范德蒙行列式不为0,

故 $|D_i| \neq 0$,从而 D_i 可逆.从而第 i 组列向量线性无关 $(i=1,2,\cdots,s)$.故 D 的所有列向量线性无关,从而 D 可逆.证毕.

推论 2 方程组(5)有唯一解.

证明 由命题 1,方程组(5)的系数矩阵 D 可逆,故(5)有唯一解.证毕.

定理 2 设 D 为 A 的固定矩阵,$m \in N$,则 $A^m =$

$$V(m)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T. \tag{7}$$

证明 因为 $A^m = V(m)U$,故方程组(5)可表示为 $DU = (E,A,\cdots,A^{w-1})^T$,从而 $U = D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$. 故 $A^m = V(m)U = V(m)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$.证毕.

用(7)求一系列幂 $A^k(k=w,w+1,\cdots,m,\cdots)$ 时,先求 $D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$,再逐个求 $V(k)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$ 即可.在实际计算中,也可直接利用初等行变换解方程组(5),即可用 $E,A,\cdots,A^{w-1}$ 表示各个 $A_i^{(h)}$.再代入(3)式计算幂 A^k.

注意,这里 D^{-1} 为 w 阶方阵,而 $(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$ 看成一个由 w 个文字 $E,A,\cdots,A^{w-1}$ 组成的列向量,不是分块矩阵.事实上,算出 $D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T$,就得到了 U.本文推导 U 中的一系列广义特征矩阵时,用到过渡矩阵 P,也即用到特征向量与广义特征向量,但由 $D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T = U$ 知,求 U 已不再需特征向量与广义特征向量了,仅需列出固定矩阵 D,再求 D^{-1}.从而避免求若当链及 P^{-1}.

特别地,当 A 为非亏损矩阵时,$n_1 = \cdots = n_s = 1$, $V(k) = (\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_s^k)$,因而固定矩阵 D 简化为范德蒙矩阵,对这一特殊情形的结论[5]已用哈密顿-凯莱定理导出.

下面是本文给出的求矩阵幂的固定矩阵算法:第一步:求 A 的极小多项式;第二步:写出可变系数向量 $V(0),V(1),\cdots,V(w-1)$,构成固定矩阵 D;第三步:求 D^{-1};第四步:用(7)式求 A^m.

命题 2 交换 $V(m)$ 中的分量的位置,公式(7)仍然成立.

证明 交换 $V(m)$ 中第 i 个与第 j 个分量的位置相当于 $V(m)$ 右乘一个初等矩阵 $P(i,j)$,即 $V(m)P(i,j)$.D 中第 i 列与第 j 列随之交换位置,成为 $DP(i,j)$.故

$$(V(m)P(i,j))(DP(i,j))^{-1} = V(m)P(i,j)P(i,j)^{-1}D^{-1} = V(m)D^{-1}.$$证毕.

定理 3 设 $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$,它的收敛半径为 r,λ_i 为 A 的特征根 $(i=1,2,\cdots,s)$,$|\lambda_i| < r$,则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛,且

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \left(f(\lambda_1), \frac{f'(\lambda_1)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_1-1)}(\lambda_1)}{(n_1-1)!}, f(\lambda_2), \frac{f'(\lambda_2)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_2-1)}(\lambda_2)}{(n_2-1)!},\cdots,f(\lambda_s),\frac{f'(\lambda_s)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_s-1)}(\lambda_s)}{(n_s-1)!}\right)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T.$$

证明 由 Lagrange-Sylvester定理[1],$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ 收敛.由定理 2,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k V(k)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k V(k)\right)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^0\lambda_1^k, \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^1\lambda_1^{k-1},\cdots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^{n_1-1}\lambda_1^{k-n_1+1}, \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^0\lambda_2^k,\cdots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^{n_s-1}\lambda_s^{k-n_s+1}\right)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T = \left(f(\lambda_1), \frac{f'(\lambda_1)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_1-1)}(\lambda_1)}{(n_1-1)!}, f(\lambda_2), \frac{f'(\lambda_2)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_2-1)}(\lambda_2)}{(n_2-1)!},\cdots,f(\lambda_s),\frac{f'(\lambda_s)}{1!},\cdots,\frac{f^{(n_s-1)}(\lambda_s)}{(n_s-1)!}\right)D^{-1}(E,A,\cdots,A^{w-1})^T.$$证毕.

定理 3与著名的 Lagrange-Sylvester定理等价,但前者比后者实用,因为无需求特征向量与广义特征向量.定理 3降低了[1,3,4]中方阵函数与矩阵幂级数的计算难度.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,求 $\sin A$.

解 易得 A 的极小多项式为 $h(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$,$\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = 2$. $f(t) = \sin t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1}$ 的收敛半径为 $r = +\infty$,$|\lambda_1|$,$|\lambda_2| < +\infty$.

固定矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1^2 & 2^2 & C_2^1 \times 2 \end{bmatrix}$,

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$,由定理 3,

$$\sin A = \left(f(1), f(2), \frac{f'(2)}{1!}\right)D^{-1}(E,A,A^2)^T = (\sin 1, \sin 2, \cos 2)\begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ A \\ A^2 \end{bmatrix} =$$

$= \sin 1(4E - 4A + A^2) + \sin 2(-3E + 4A - A^2) +$

$$\cos 2(2E-3A+A^2)=$$

$$\sin 1\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\sin 2\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+$$

$$\cos 2\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sin 1&0&0&0\\0&\sin 2+\cos 2&-\cos 2&-\cos 2\\0&\cos 2&\sin 2-\cos 2&-\cos 2\\0&0&0&\sin 2\end{bmatrix}.$$

参考文献

1 陈啓文宗著.线性系统理论与设计[美].王纪文等译.北京:科学出版社,1988.29~45.

2 刘升德.根子空间的几何理论与演化矩阵的实际计算.阜新矿业学院学报,1994,(4):111~114.

3 张贤科,许甫华.高等代数学.北京:清华大学出版社,1998.172~173,189~199.

4 陈大新.矩阵理论.上海:上海交通大学出版社,1991.132~133,142~143.

5 李德光.求 n 阶 m 次方幂的一个公式.湘潭矿业学院学报,1994,(4):80~81.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第25页 Continue from page 257)

10 Perry J M. A class of conjugate algorithms with a two step variable metric memory, Discussion paper 269, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science. Northwestern: Northwestern University, 1977.

11 Powell M J D. A new algorithm for unconstrained optimation, In: Nonlinear Programming, J B Rosen, O L Mangasarian et al eds. New York: Academic Press, 1970.

12 Shanno D F. On the convergence of a new conjugate gradient algorithm. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, (15): 1247~1257.

13 Wei Z, Qi L, Chen X. An SQP-typemethod and its application in stochastic programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, (116): 205~228.

14 Wei Z, Li G, Qi L. New Quasi-Newton methods for unconstrained optimization problems. Nanning: Department of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Guangxi, China, 2002.

15 Wei Z, Yu G, Yuan G et al.. The superlinear convergence of a modified BFGS-type method for uconstrained optimization, to appear in Computational Optimization and Applications.

16 Dai Y, Ni Q. Testing different conjugate gradient methods for large-scale unconstrained optimization. Journal of Comput Math, 2003, 21(3): 311~320.

17 Griewank A. On automatic differentiation, In: Mathematical Programming: Recent Developments and Applications, M Iri, K Tanabe, eds. Kluwer: Kluwer Academic Publishers, 1989, 84~108.

(责任编辑:蒋汉明 黎贞崇)