DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.01.003
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (1): 10~ 12

ħ混合序列的广义 Jamison型加权和的强收敛性*

Strong Convergence Properties of Jamison Weighted Sums of ħ Random Sequences

伍艳春　　王远清
Wu Yanchun　Wang Yuanqing

(桂林工学院数理系　桂林市建干路 12号　541004)
(Department of Math.& Phy., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　讨论 ħ混合序列的广义 Jamison型加权和的强收敛性,推广了著名的 Jamison定理.

关键词　ħ混合序列　Jamison型加权和　强收剑性
中图法分类号　O211.4

Abstract　The strong convergence properties of Jamison weighted sums of ħ Random Sequences was discussed, and the famous Jamison theorem was extended.

Key words　ħ random sequence, Jamison weighted sums, strong convergence property

1　定义和引理

设 $\{X_i, i \in N\}$是概率空间 (K, U, P)上的随机变量序列,$F_s = e(X_i, i \in s \subset N)$为 e-域,在 U中给定 e-域 F, R,令

$h(F, R) = \sup\{|P(B|A) - P(B)|; A \in F, P(A) > 0, B \in R\}$,

引入如下的相依系数:对 $k \geqslant 0$,令

$$ħ(k) = \sup\{h(F_S, F_T),\text{有限子集 } S, T \subset N,\text{且 } \mathrm{dist}(S, T) \geqslant k\}, \quad (1)$$

其中 $\mathrm{dist}(S, T)$表示集合 S, T的距离.显然,$0 \leqslant ħ(k+1) \leqslant ħ(k) \leqslant 1$,且 $ħ(0) = 1$.

定义 1[1]　设随机序列 $\{X_i, i \in N\}$如存在 $k \in N$,使 $ħ(k) < 1$,则称 $\{X_i, i \in N\}$是 ħ混合序列.

ħ混合与通常的 h混合有一定的类似,但并不相同,它们互不包含.事实上,在通常的 h混合系数 $h(k)$中,(1)式的 S, T分别是 $[1, n]$和 $[n+k, \infty)$中的子集;另外,ħ混合只要求存在某 $k \in N$,使 $ħ(k) < 1$,在这一点上要比 h混合的要求 $h(n) \to 0, n \to \infty$弱得多.因此,ħ混合是一类极为广泛的相依混合序列,对其进行研究是很有价值的.本文讨论 ħ混合序列的广义 Jamison型加权和的强收敛性,得到与独立情形一样的 Jamison定理,并推广了 Jamison定理.

Jamison等[2]证明了如下结果:

定理 A　设 $\{X_i\}$是 i.i.d.列,$\{a_i\}$是正数列,满足条件 $E|X_1| < \infty$, $EX_1 = 0$, $A_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i \uparrow \infty$, $n \to \infty$, $\#\{i: A_i a_i^{-1} \leqslant n\} = O(n)$, $n \geqslant 1$,则

$$T_n \triangleq A_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to 0,\ \text{a.s.}\ n \to \infty.$$

本文把 Jamison定理的独立情形推广到 ħ混合序列,并把 $N(n) = O(n)$, $E|X_1| < \infty$,推广到更一般的情况 $N(n) = O(f(n))$, $Ef(|X_1|) < \infty$,以及把 $\{a_i\}$, $\{A_i\}$推广到一般数列.

引理 1[1]　设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$是 ħ混合序列,满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n < \infty, \quad (2)$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - EX_n)$ a.s.收敛.

定义 2[3]　设函数 $l(x) > 0 (x > 0)$,若存在 $x_0 > 0$及常数 $C > 0$,使得任意 $t \geqslant x \geqslant x_0$,恒有 $l(t) \geqslant Cl(x)$,则称 $l(x)$为拟单调上升的,若 $l(t) \leqslant Cl(x)$,则称 $l(x)$为拟单调下降的.

引理 2[3]　设 $h(x) > 0$为慢变函数,则对 $\forall W > 0$, $x^{W}h(x)$为拟单调上升函数,$x^{-W}h(x)$为拟单调下降函数.

为行文方便,本文一律以 C记与 n无关的正常数,"≪"表示通常的大"O",$N(n) \triangleq \#\{i: A_i a_i^{-1} \leqslant$

2003-05-06收稿.
* 广西区学位委员会 2003年学位授权点学科建设经费资助.

$n\}$.

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列, $\{a_i\}$ 为正数列, $A_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_i \uparrow \infty$,

$$EX_1 = 0, \tag{3}$$

$$E|X_1| < \infty, \tag{4}$$

$$N(n) \ll n, n\geqslant 1, \tag{5}$$

则

$$T_n \triangleq A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \to 0, \text{ a.s.} \tag{6}$$

定理 2 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是同分布 $\tilde{\rho}$ 混合序列, 满足 (3) 式, $h(x) > 0$ 为慢变函数, $f(x) \triangleq x^r h(|x|)$, $1 < r < 2$, $\{a_i\}$ 为任意数列, $0 < A_n \uparrow \infty$,

$$E(f(|X_1|)) < \infty, \tag{7}$$

$$N(n) \ll f(n), n\geqslant 1, \tag{8}$$

则 (6) 式成立.

3 定理的证明

定理 1的证明

设 $N(0) = 0$, $b_i \triangleq A_i a_i^{-1}$, 由 (5) 式得 $b_i \to \infty$, $i \to \infty$. 如不然, 则有无穷多个 i, 及某个 n_0 使 $b_i \leqslant n_0$, 由 (5) 式得 $N(n_0) = \infty \ll n_0$, 这是不可能的, 因此, $b_i \to \infty$, $i \to \infty$.

记 $Y_i = X_i I(|X_i| \leqslant b_i)$,

则有

$$T_n = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - Y_i) + A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i (Y_i - EY_i) + A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i EY_i \triangleq I_1 + I_2 + I_3, \tag{9}$$

由 (3) 式及 (5) 式得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i \neq Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| \geqslant b_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} P(|X_i| \geqslant b_i > j-1) = \sum_{j=1}^{\infty} (N(j) - N(j-1))P(|X_1| \geqslant j-1) = \sum_{j=1}^{\infty} N(j)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \ll \sum_{j=1}^{\infty} jP(j \leqslant |X_1| < j+1) \ll E|X_1| < \infty.$$

由 Borel-Cantelli引理得

$P(X_i \neq Y_i, i.o.) = 0$,

故

$$I_1 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - Y_i) \to 0, \text{ a.s.} \tag{10}$$

又因为 $E|X_1| < \infty$, 且 $b_i \to \infty$,

所以 $\lim\limits_{i\to\infty} b_i P(|X_1| > b_i) = 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} E(X_i I_{(|X_i|\leqslant b_i)}) = \lim\limits_{i\to\infty} E(X_1 I_{(|X_i|\leqslant b_i)}) = EX_1 = 0$.

由此可得 $|EY_i| = |EX_i I_{(|X_i|\leqslant b_i)}| \to 0$,

又 $A_n^{-1} a_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} A_n^{-1} a_i = 1$, 故由 Toeplitz引理得

$$I_3 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i EY_i \to 0. \tag{11}$$

下证

$$I_2 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i (Y_i - EY_i) \to 0, \text{ a.s.} \tag{12}$$

因为 $0 < A_n \uparrow \infty$, 由 Kronercker引理, 只需证明 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1} a_i (Y_i - EY_i)$ a.s.收敛.

由 $\tilde{\rho}$ 的定义知 $\{A_i^{-1} a_i Y_i\}$ 仍然是 $\tilde{\rho}$ 混合的, 故由引理 1只需证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(A_i^{-1} a_i Y_i) < \infty, \tag{13}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(A_i^{-1} a_i Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1} a_i^2 E(Y_i - EY_i)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} A_i^{-2} a_i^2 EY_i^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} b_i^{-2} EY_i^2 \ll \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} b_i^{-2} EX_i^2 I_{(|X_i|\leqslant b_i<j)} \ll \sum_{j=2}^{\infty} (N(j) - N(j-1))(j-1)^{-2} EX_1^2 I_{(|X_1|\leqslant j)} = \sum_{j=2}^{\infty} (N(j) - N(j-1))(j-1)^{-2}\sum_{k=1}^{j} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} (N(j) - N(j-1))(j-1)^{-2} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} N(j)((j-1)^{-2} - j^{-2}) EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j((j-1)^{-2} - j^{-2}) EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^{-2} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll \sum_{k=2}^{\infty} k^{-1} E|X_1| k I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll E|X_1| < \infty. \tag{14}$$

故 (13) 成立, 综合 (9) ~ (12) 定理 1得证. 证毕.

定理 2的证明

仍沿用定理 1证明的符号, 只需证明

$I_i = 0$, a.s. $i = 1, 2, 3$.

由引理 2知 $f(x)$ 拟单调上升, 由 (3) 式及 (7) 式, 类似于 (10) 式的证明得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i \neq Y_i) = \sum_{j=1}^{\infty} (N(j) - N(j-1))P(|X_1| \geqslant j-1) = \sum_{j=1}^{\infty} N(j)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \ll \sum_{j=1}^{\infty} f(j)P(j \leqslant |X_1| < j+1) \leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(f(|X_1|)P(j\leqslant |X_1|<j+1)) \ll Ef(|X_1|) <\infty .$$

故 $I_1 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - Y_i) \to 0$, a. s.

下证 $I_2 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - EY_i)\to 0$, a. s.

为此,只需证明(13)式,类似于(14)式的证明有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(A_i^{-1}a_iY_i) \ll \sum_{j=2}^{\infty} (N(j)-N(j-1))(j-1)^{-2}EX_1^2I_{(|X_1|\leqslant j)} = \sum_{j=2}^{\infty} (N(j)-N(j-1))(j-1)^{-2}\sum_{k=1}^{j} EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} N(j)((j-1)^{-2}-j^{-2})EX_1^2I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} f(j)((j-1)^{-2}-j^{-2})EX_1^2I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} j^r h(j)((j-1)^{-2}-j^{-2})EX_1^2 I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)}, \quad (15)$$

因为 $r<2$,取 $0<\varepsilon<2-r$,有 $r+\varepsilon-2<0$,且由 $x^{-\varepsilon}h(x)$ 及 $x^{r-2}h(x)$ 拟单调下降得

$$\sum_{j=k}^{\infty} j^r h(j)((j-1)^{-2}-j^{-2}) = \sum_{j=k}^{\infty} j^{r+\varepsilon}j^{-\varepsilon}h(j)((j-1)^{-2}-j^{-2}) \ll k^{-\varepsilon}h(k)\sum_{j=k}^{\infty} j^{r+\varepsilon}((j-1)^{-2}-j^{-2}) \ll k^{-\varepsilon}h(k)\sum_{j=k}^{\infty} j^{r+\varepsilon-3} \ll k^{-\varepsilon}h(k)\int_k^{\infty} x^{r+\varepsilon-3}\mathrm{d}x = k^{-\varepsilon}h(k)\frac{1}{r+\varepsilon-2}x^{r+\varepsilon-2}\Big|_k^{\infty} = k^{-\varepsilon}h(k)\frac{1}{-r-\varepsilon+2}k^{r+\varepsilon-2} \ll k^{r-2}h(k),$$

把上式代入(15)式,且注意到 $x^{r-2}h(x)$ 拟单调下降得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(A_i^{-1}a_iY_i) \ll \sum_{k=2}^{\infty} k^{r-2}h(k)E|X_1|^r|X_1|^{2-r}I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll \sum_{k=2}^{\infty} E(|X_1|^{r-2}h(|x_1|)\cdot|x_1|^r\cdot|x_1|^{2-r})I_{(k-1<|X_1|\leqslant k)} \ll E|X_1|^r h(|X_1|) = Ef(|X_1|)<\infty .$$

故(13)式成立.

最后证 $I_3 = A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_iEY_i \to 0$,

因 $0<A_n\uparrow\infty$,由 Kronercker引理,只需证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}a_iEY_i <\infty .$$

因为 $EX_1=0$,所以 $|EX_1I_{(|X_1|\leqslant b_i)}| = |EX_1I_{(|X_1|>b_i)}|$,故有

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}a_iEY_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}a_i|EY_i| = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1}|EX_1I_{(|X_1|\leqslant b_i)}| = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1}|EX_1I_{(|X_1|>b_i)}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1}E|X_1|I_{(|X_1|>b_i)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{j-1<b_i\leqslant j} b_i^{-1}E|X_1|I_{(|X_1|>b_i>j-1)} \ll \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)^{-1}(N(j)-N(j-1))\sum_{k=j}^{\infty} E|X_1|I_{(k\leqslant|X_1|<k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{k} (j-1)^{-1}(N(j)-N(j-1))E|X_1|I_{(k\leqslant|X_1|<k+1)}, \quad (16)$$

因为 $r>1$,取 $\varepsilon_1>0$,使 $r-\varepsilon_1>1$ 有

$$\sum_{j=2}^{k} (j-1)^{-1}(N(j)-N(j-1)) \ll \sum_{j=2}^{k} N(j)((j-1)^{-1}-j^{-1}) \ll \sum_{j=2}^{k} j^rh(j)((j-1)^{-1}-j^{-1}) = \sum_{j=2}^{k} j^{r-\varepsilon_1}(j^{\varepsilon_1}h(j))((j-1)^{-1}-j^{-1}) \ll k^{\varepsilon_1}h(k)\sum_{j=2}^{k} j^{r-\varepsilon_1-2} \ll k^{\varepsilon_1}h(k)\int_2^k x^{r-\varepsilon_1-2}\mathrm{d}x = k^{\varepsilon_1}h(k)\cdot\frac{1}{r-\varepsilon_1-1}x^{r-\varepsilon_1-1}\Big|_2^k \ll k^{r-1}h(k),$$

代入(16)式,且注意到 $x^{r-1}h(x)$ 拟单调上升得

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}a_iEY_i \ll \sum_{k=2}^{\infty} k^{r-1}h(k)E|X_1|I_{(k\leqslant|X_1|\leqslant k+1)} \ll \sum_{k=2}^{\infty} E(|X_1|^{r-1}h(|X_1|)|X_1|)I_{(k\leqslant|X_1|<k+1)} \ll Ef(|X_1|)<\infty .$$

证毕.

参考文献

1 吴群英. $\tilde{\rho}$混合序列的完全收敛性和强收敛性,工程数学学报,2004,21(1):75~80.

2 Jamison B, Orey S, Pruitt W. Convergence of weighted of independent Random variables. Z Wahrsch Verb Gebiete, 1965,4:40~44.

3 吴群英.两两 NQD列的广义 Jamison型加权和的强收敛性.数学研究,2001,4:386~393.

(责任编辑:黎贞崇)