DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (1): 13~15, 19

一类高阶中立型方程的正解分类*

Classifications of Positive Solutions of A Class of Higher-order Neutral Equation

莫永向　　唐清干
Mo Yongxiang　Tang Qinggan

(桂林电子工业学院七系　桂林市金鸡路 1号　541004)
(Dept. 7, Guilin Institute of Electronic Technology, 1 Jinjilu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　研究高阶中立型微分方程:

$$(x(t)+x(t-\mathrm{f}))^{(n)}+f(t,x(t-\mathrm{e}))=0, t\geqslant t_0$$

最终正解分类,得到一些充要条件,补充了相关文献的相应结论.

关键词　中立型方程　高阶　正解　分类
中图法分类号　O175

Abstract　A Class of higher-order nonlinear neutral equation

$$(x(t)+x(t-\mathrm{f}))^{(n)}+f(t,x(t-\mathrm{e}))=0, t\geqslant t_0$$

is considered. We have studied the classifications of positive solutions of the higher-order nonlinear neutral equation, and obtained some sufficient and necessary conditions.

Key words　neutral differential equation, higher-order, positive solution, classification.

1 定义

近年,对微分方程的非振动解的分类引起不少学者的关注[1~3].

对于如下高阶中立型微分方程

$$(x(t)+bx(t-\mathrm{f}))^{(n)}+f(t,x(t-\mathrm{e}))=0, t\geqslant t_0, \tag{1.1}$$

式中, $\mathrm{f}>0$, $\mathrm{e}>0$, $n\geqslant 1$为正整数; $f(t,u)$关于 t,u连续且 $f(t,u)>0$,当 $u>0$, $b\in(0,1)\cup(1,\infty)$时,文献[1]给出了正解的分类并得到了一些充要条件.当 $b=-1$, n为奇数时,文献[2]讨论了正解的分类.当 $b\in(-1,0)$时,笔者的另一篇论文的结果已包含这种情形.

本文研究如下高阶中立型微分方程

$$(x(t)+x(t-\mathrm{f}))^{(n)}+f(t,x(t-\mathrm{e}))=0, t\geqslant t_0, \tag{1.2}$$

式中, $\mathrm{f}>0$, $\mathrm{e}>0$, $n\geqslant 1$为正整数; $f(t,u)$关于 t,u连续且 $f(t,u)>0$,当 $u>0$时,利用文献[4]的一些技巧讨论方程(1.2)式最终正解的分类并建立了一些充要条件,补充了文献[1]的相应结论.

定义 1.1　若对每个固定的 t, $f(t,x)/x$ 关于 $x>0$是非减的,则称 f 是超线性的;若对每个固定的 t, $f(t,x)/x$ 关于 $x>0$是非增的,则称 f是次线性的.

显然,对 $0<a\leqslant x\leqslant b$,若 f 是超线性的,则有 $f(t,a)\leqslant f(t,x)\leqslant f(t,b)$;若 f 是次线性的,则有 $\frac{a}{b}f(t,b)\leqslant f(t,x)\leqslant\frac{b}{a}f(t,a)$.

定义 1.2　方程(1.1)的解 $x(t)$称为最终正解(简称正解),如果存在充分大的 $T>t_0>0$,当 $t\geqslant T$时,恒有 $x(t)>0$.

定义 1.3　设 $x(t)$是方程(1.1)的一个最终正解,我们定义

$$E_j(\infty,*)=\{x(t), t\geqslant t_0 | \lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-2}}=\infty, \lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-1}}=a>0\},$$

$$\hat{E}_j(\infty,*)=\{x(t), t\geqslant t_0 | \lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-2}}=\infty, \lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-1}}\text{有界}\},$$

$$E_j(\infty,0)=\{x(t), t\geqslant t_0 | \limsup_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-2}}=\infty,$$

2003-06-16收稿, 2003-09-09修回。
* 广西教育基金(D200010)和广西自然科学基金(0135007)资助项目。

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = 0\}$,

$E_j(*,0) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-2}} = a > 0,$

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = 0\}$,

$\hat{E}_j(*,0) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \dfrac{x(t)}{t^{2j-2}}$ 有界,

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = 0\}$,

$O_j(\infty,*) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = \infty,$

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j}} = a > 0\}$,

$\hat{O}_j(\infty,*) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = \infty,$

$\dfrac{x(t)}{t^{2j}}$ 有界},

$O_j(\infty,0) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \limsup\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = \infty,$

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j}} = 0\}$,

$O_j(*,0) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}} = a > 0,$

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j}} = 0\}$,

$\hat{O}_j(*,0) = \{x(t), t \geqslant t_0 \mid \dfrac{x(t)}{t^{2j-1}}$ 有界, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j}} = 0\}$.

显然 $E_j(\infty,*) \subset \hat{E}_j(\infty,*)$, $E_j(*,0) \subset \hat{E}_j(*,0)$, $O_j(\infty,*) \subset \hat{O}_j(\infty,*)$, $O_j(*,0) \subset \hat{O}_j(*,0)$.

今后,我们约定如果没有明确一个不等式成立的范围,总假设它对所有充分大的 t 成立.

2 引理

引理 2.1[5] 设 $u(t) \in C^n(t_0,\infty)$,满足 $u(t) \neq 0, u(t)u^{(n)}(t) < 0$,对 $t \geqslant t_0$,则存在一个整数 $l \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 及 $t_1 \geqslant t_0$,使得 $(-1)^{n-l-1} = 1$,以及

$u(t)u^{(i)}(t) > 0,\ t \geqslant t_1,\ 0 \leqslant i \leqslant l,$

$(-1)^{n-i-1}u(t)u^{(i)}(t) > 0,\ t \geqslant t_1,\ l \leqslant i \leqslant n.$

引理 2.2 设 $\dfrac{x(t)}{t^i}$ 在 $[t_0,\infty)$ 上恒正 (i 为非负整数),令

$$z(t) = x(t) + x(t - \text{f}), \qquad (2.1)$$

若 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^i} = l (\neq \infty)$,那么 $\dfrac{x(t)}{t^i}$ 有界,特别地,当 $l = 0$ 时,$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^i} = 0$.

证明 若 $\dfrac{x(t)}{t^i}$ 无界,那么存在 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$,使得 $\dfrac{x(t_n)}{t_n^i} = \max\limits_{\leqslant t_n}\dfrac{x(t)}{t^i} \to \infty, n \to \infty$.

于是 $\dfrac{z(t_n)}{t_n^i} = \dfrac{x(t_n)}{t_n^i} + \dfrac{x(t_n - \text{f})}{t_n^i} \geqslant \dfrac{x(t_n)}{t_n^i} \to \infty, n \to \infty$,这与 $\dfrac{z(t)}{t^i}$ 收敛矛盾.所以,$\dfrac{x(t)}{t^i}$ 有界.

由 (2.1) 式,知

$$\frac{z(t)}{t^i} = \frac{x(t)}{t^i} + \frac{x(t - \text{f})}{t^i} \geqslant \frac{x(t)}{t^i} \geqslant 0, \qquad (2.2)$$

因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^i} = 0$,所以由 (2.2) 式及两边夹定理知,$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^i} = 0$.证毕.

3 主要结论

定理 3.1 设 $x(t)$ 是方程 (1.2) 式的一个最终正解,

(a) n 是偶数时,存在 $j \in \{1, 2, \cdots, \dfrac{n}{2}\}$,使 $x(t)$ 是 $\hat{E}_j(\infty,*)$、$E_j(\infty,0)$、$\hat{E}_j(*,0)$ 三种类型之一.

(b) n 是奇数时,存在 $j \in \{1, 2, \cdots, \dfrac{n-1}{2}\}$,使 $x(t)$ 要么是 $\hat{O}_j(\infty,*)$、$O_j(\infty,0)$、$\hat{O}_j(*,0)$ 三种类型之一,要么收敛.

证明 $z(t)$ 如 (2.1) 式所定义,n 是偶数,若 $x(t)$ 是 (1.2) 的一个最终正解,显然有 $z(t) > 0, t > T$,再根据引理 2.1 及文献 [1] 的定理 1 得知,$z(t)$ 是 $E_j(\infty,*)$、$E_j(\infty,0)$、$E_j(*,0)$ 三种类型之一.

若 $z(t) \in E_j(\infty,*)$,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-2}} = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-1}} = a > 0$,由引理 2.2 知,$\dfrac{x(t)}{t^{2j-1}}$ 有界.

从而,$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{x(t)}{t^{2j-2}} = \infty$,所以 $x(t) \in \hat{E}_j(\infty,*)$.

若 $z(t) \in E_j(\infty,0)$,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-2}} = \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-1}} = 0$,由引理 2.2 知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-1}} = 0, \text{且} \limsup_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-2}} = \infty,$$

所以 $x(t) \in E_j(\infty,0)$.

若 $z(t) \in E_j(*,0)$,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-2}} = a > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z(t)}{t^{2j-1}} = 0$,由引理 2.2 知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-1}} = 0, \text{且} \frac{x(t)}{t^{2j-2}} \text{有界},$$

所以 $x(t) \in \hat{E}_j(*,0)$. n 是奇数,其证明过程与偶数时类似,故略去.证毕.

定理 3.2 m 是偶数,f 是超线性或次线性的,那么方程 (1.2) 式有一个 $E_j(\infty,*)$ 型正解的充要条件是存在一个正常数 k,使得

$$\int_{t_0}^{\infty} s^{n-2j} \left| f(s, k(s - \text{e})^{2j-1}) \right| ds < \infty, \qquad (3.1)$$

式中,$j \in \{1, 2, \cdots, \dfrac{n}{2}\}$.

证明　必要性　设 $x(t)$ 是方程 (1.2) 的一个 $E_j(\infty,*)$ 型正解，由 (1.2) 式知，当 $t>t_1$ 时 $z(t)>0$ 及 $z^{(n)}(t)<0$ 且 $z^{(k)}(t)$ 是最终单调的 ($k=0,1,\cdots,n-1$)。又因为 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x(t)}{t^{2j-1}}=a>0$，所以存在 $t_2\geqslant t_1$，当 $t\geqslant t_2$ 时，有 $\frac{1}{2}at^{2j-1}\leqslant x(t)\leqslant\frac{3}{2}at^{2j-1}$.

于是，当 f 为超线性时：$f(t,x(t-\mathrm{e}))\geqslant f(t,\frac{a}{2}(t-\mathrm{e})^{2j-1})$，$t\geqslant t_2+\mathrm{e}=t_3$.

当 f 为次线性时：$f(t,x(t-\mathrm{e}))\geqslant f(t,\frac{3a}{2}(t-\mathrm{e})^{2j-1})$，$t\geqslant t_2+\mathrm{e}=t_3$.

由 (2.1) 式知 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{z(t)}{t^{2j-1}}=2a>0$.

而由罗必塔法则可知 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{z(t)}{t^{(2j-1)}}=$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{z'(t)}{(2j-1)t^{2j-2}}=\cdots=\lim_{t\to\infty}\frac{z^{(2j-1)}(t)}{(2j-1)!}=2a.$$

从而有 $\lim\limits_{t\to\infty}z^{(2j-1)}(t)=2a(2j-1)!$.

当 $j<\frac{n}{2}$ 时，我们进一步有 $\lim\limits_{t\to\infty}z^{(2j)}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}z^{(2j+1)}(t)=\cdots=\lim\limits_{t\to\infty}z^{(n-1)}(t)=0$.

对 (1.2) 两边积分 $(n-2j+1)$ 次，得：

$$z^{(2j-1)}(t)=2a(2j-1)!+\int_t^{\infty}\frac{(s-t)^{n-2j}}{(n-2j)!}f(s,x(s-\mathrm{e}))\mathrm{d}s\geqslant 2a(2j-1)!+K\int_t^{\infty}(s-t)^{n-2j}|f(s,k(s-\mathrm{e})^{2j-1})|\mathrm{d}s,\ t>t_3,$$

式中，K 和 k 为常数，由此可发现 (3.1) 式成立.

充分性　若 f 是超线性的，取 $c=k/2$，若 f 是次线性的，取 $c=k$.

由 (3.1) 式可知，存在 $T\geqslant t_0$，使得 $t\geqslant T$ 时有：

$$\frac{1}{(2j-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t+(2i+1)\mathrm{f}}^{t+(2i+2)\mathrm{f}}\frac{(u-t)^{n-2j}}{(n-2j)!}|f(u,k(u-\mathrm{e})^{2j-1})|\mathrm{d}u<1,\qquad(3.2)$$

令 $k(t)=t^{2j-1}$ 以及 $C(t_0,\infty)$ 上所有实函数所构成的线性空间 X，满足：$\sup\limits_{t\geqslant t_0}\frac{|x(t)|}{k(t)}<\infty$.

定义 X 上的一个范数：$\|x\|=\sup\limits_{t\geqslant t_0}\frac{|x(t)|}{k(t)}$，则 X 是一个 Banach 空间，再定义 X 上的一个子集 Ω：$\Omega=\{x\in X|ck(t)\leqslant x(t)\leqslant 3ck(t)\}$，则 Ω 是 X 的一个有界闭凸子集，我们再定义 Ω 上的一个算子 $F:\Omega\to X$ 如下：

$$(Fx)(t)=\begin{cases}2ck(t)+\displaystyle\int_T^t\frac{(t-s)^{2j-2}}{(2j-2)!}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{s+(2i+1)\mathrm{f}}^{s+(2i+2)\mathrm{f}}\frac{(u-s)^{n-2j}}{(n-2j)!}\cdot f(u,x(u-\mathrm{e}))\mathrm{d}u\mathrm{d}s, & t\geqslant T,\\ (Fx)(T), & t_0\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

Fx 是一个 Ω 到 Ω 的映射. 实际上，如果 $x(t)\in\Omega$，那么：$(Fx)(t)\geqslant 2ck(t)\geqslant ck(t)$.

进一步，由 (3.2) 式，我们有

$$(Fx)(t)\leqslant 2ck(t)+\frac{(t-T)^{2j-1}}{(2j-1)!}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\int_{T+(2i+1)\mathrm{f}}^{T+(2i+2)\mathrm{f}}\frac{(u-T)^{n-2j}}{(n-2j)!}|f(u,k(u-\mathrm{e})^{2j-1})|\mathrm{d}u\leqslant 2ck(t)+ck(t)=3ck(t).$$

显然 F 还是一个全连续的相对紧的映射，由 Schauder 不动点定理，存在一个 $x^*\in\Omega$ 使得 $Fx^*=x^*$，容易验证 x^* 是方程 (1.2) 的一个最终正解. 进一步地，由罗必塔法则，我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{2j-1}}\int_T^t\frac{(t-s)^{2j-2}}{(2j-2)!}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{s+(2i+1)\mathrm{f}}^{s+(2i+2)\mathrm{f}}\frac{(u-s)^{n-2j}}{(n-2j)!}f(u,x(u-\mathrm{e}))\mathrm{d}u\mathrm{d}s=\cdots=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(2j-1)!}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t+(2i+1)\mathrm{f}}^{t+(2i+2)\mathrm{f}}\frac{(u-t)^{n-2j}}{(n-2j)!}f(u,x(u-\mathrm{e}))\mathrm{d}u=0,$$

于是有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x^*(t)}{t^{2j-1}}=2c$，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{x^*(t)}{t^{2j-2}}=\infty$，从而 $x^*(t)$ 是方程 (1.2) 的一个 $E_j(\infty,*)$ 型正解.

利用定理 3.2 的证明类似的方法我们可以得到下述定理.

定理 3.3　设 n 是偶数，f 是超线性或次线性的，那么方程 (1.2) 有一个 $E_j(*,0)$ 型正解当且仅当存在一个正常数 k，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}s^{n-2j+1}|f(s,k(s-\mathrm{e})^{2j-2})|\mathrm{d}s<\infty,\qquad(3.3)$$

式中，$j\in\{1,2,\cdots,\frac{n}{2}\}$.

定理 3.4　设 n 是奇数，f 是超线性或次线性的，那么

(1) 方程 (1.2) 具有一个 $O_j(\infty,*)$ 型正解的充要条件是存在一个正常数 k，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}s^{n-2j-1}|f(s,k(s-\mathrm{e})^{2j})|\mathrm{d}s<\infty.\qquad(3.4)$$

(2) 方程 (1.2) 具有一个 $O_j(*,0)$ 型正解当且仅当存在一个正常数 k，使得

$$\int_{t_0}^{\infty}s^{n-2j}|f(s,k(s-\mathrm{e})^{2j-1})|\mathrm{d}s<\infty.\qquad(3.5)$$

(3) 方程 (1.2) 具有一个收敛于一个正数的正解

(下转第 19 页　Continue on page 19)

数为 _ , T 的线性方程组 ,其学习算法类似文献 [6], 最终通过调整参数 _ , T, 可得到 XOR码组 (x_1, x_2).

以上重点以 XOR问题为例 , 讨论了变参数动态激活函数的选取方法 ,有关这方面的其它应用见文献 [7~ 9].

4 结束语

本文提出一种新神经元数学模型 -VTAF神经元模型 , 是一种能同时模拟包括 M-P与 TAF神经元在内的各种神经元通用的新数学模型 .文中还给出这种神经元数学模型的一般形式 , 在这种模型中 , 激活函数可动态地选取 , 一旦选定 , 加入参数改善函数的响应特性 .由于这种神经元构成的网络比目前常用的网络拥有更大的自由度 ,对推动神经网络新模型及理论的研究有很大的促进作用 .

参考文献

1 吴佑寿 ,赵明生 ,丁晓青 .一种激励函数可调的新人工神经网络及应用 .中国科学 (E辑) , 1997, 27(1): 55~ 60.

2 吴佑寿 ,赵明生 .激活函数可调的神经元模型及其监督学习与应用 .中国科学 (E辑) , 2001, 31(3): 263~ 272.

3 龙欣海 ,肖田元 ,陈晓峰 .采用变参数激励函数的人工神经网络 .计算机工程 , 2002, 27(12): 71~ 73.

4 Stork D G, A J D, et al. How to solve the N-bit parity problem with two hidden units. Neural Networks, 1992, 5 923~ 926.

5 Hornik K. Approxomation capabilities of multiplayer feed-forward networks. Neural Networks, 1991, 4 251~ 257.

6 李洪兴 .数学神经网络 (II) .北京师范大学学报 , 1997, 33 (1): 35~ 42.

7 周永权 .基于代数神经网络的多元多项式近似因式分解模型及学习算法 .计算机研究与发展 , 1999, 36(6): 668~ 674.

8 周永权 .前向代数神经网络的函数逼近理论及学习算法 .计算机研究与发展 , 2000, 37(3): 264~ 271.

9 周永权 ,赵 斌 .基于 FLANN自组织多项式网络学习算法 .计算机研究与发展 , 2001, 38(5): 587~ 590.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 15页 Continue from page 15)

的充要条件是存在一个正常数 k,使得

$$\int_{t_0}^{\infty} s^{n-1} | f(s,k) | \mathrm{d}s < \infty , \qquad (3.6)$$

式中 , $j \in \{1, 2, \cdots , \frac{n-1}{2}\}$.

注 3.1 本文所有的结论可以很容易地推广到如下形式的方程中去:

$$(x(t) + x(t - \tau))^{(n)} + f(t, x(t - \sigma_1), \cdots , x(t - \sigma_n)) = 0, t \geqslant t_0 .$$

参考文献

1 Erbe L H, Kong Qingkai, Zhang B G. Oscillation theory for functional differential equations. New York: Marcel Dekker, 1995. 324~ 337.

2 Agarwal R P, Tang X H, Wang Z C. The existence of positive solutions to neutral differential equations. J Math Anal Appl, 1999, (240): 446~ 467.

3 Li W T, Fei X L. Classifications and existence of positive solutions of higher-order nonlinear delay differential equations. Nonlinear Analysis, 2000, (41): 433~ 445.

4 El-Metwally H, Kulenovic M R S, Had Siomerspahic. Nonoscillation solutions for system of neutral equation. Nonlinear Analysis, 2003, 54 63~ 81.

5 Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments. New York: Marcel Dekkev, 1987.

(责任编辑: 黎贞崇)