DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.02.002
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (2): 85, 90

关于 Diophantine方程 $S_x(n) = S_y(3)$*
On the Diophantine Equation $S_x(n) = S_y(3)$

杨仕椿
Yang Shichun

(阿坝师范高等专科学校 四川都江堰 611830)
(Aba Teacher's College, Dujiangyan, Sichuan, 611830, China)

摘要 设 $S_m(n)$ 是第 m 个 n 角数,给出当 $n-2$ 为平方数时方程 $S_x(n) = S_y(3)$ 的全部解的通式,并证明当 $n-2$ 为非平方数时该方程有无穷多组正整数解.
关键词 Diophantine方程 多角数 正整数解
中图法分类号 O156.1

Abstract Let $S_m(n)$ denote the m-th n-gonal number. In this paper, the whole positive integer solutions of the Diophantine equation $S_x(n) = S_y(3)$ are given when $n > 6$ and $n-2$ is a square. We prove that if $n-2$ isn't a square, then the equation has infinitely many positive integer solutions.
Key words Diophantine equation, polygonal number, positive integer solutions

设 N 为正整数集, 对于 $m, n \in N$, Subramaniam[1,2]称正整数 $S_m(n) = [2m + (n-2)m(m-1)]$ 为第 m 个 n 角数. 显然,当 $n = 3$ 时, $S_m(n)$ 即为通常的三角数,当 $n = 4$ 时, $S_m(n)$ 即为平方数,当 $n > 3$ 时, $S_m(n)$ 统称为多角数.

1995年, Di Porto 和 Filippont[3]讨论了含有多角数的 Diophantine方程

$$S_x(n) = S_y(3), x, y \in N. \qquad (1)$$

他们证明: 当 $n = 4, 5, 6, 7$ 时,方程(1)皆有解;当 $n > 6$ 且 $n-2$ 为平方数时,方程(1)仅有有限多组解 (x, y). 而文献[4~7]讨论 $n-2$ 为平方数时及 $n-2$ 为非平方数时的一些特殊情形,但文献[4,6,7]中的结论均是不正确的.

本文讨论方程(1),给出当 $n-2$ 为平方数时方程(1)的全部解的通式,并证明当 $n-2$ 为非平方数时该方程有无穷多组正整数解.

定理 1 当 $n-2$ 是平方数时,令 $n = t^2 + 2$,且 $d \mid t^4 - 5t^2 + 4$, $d \in N$,则方程(1)的所有解为 $(x, y) = \left(\frac{t^2 + 2d - 5}{4d} + \frac{(d-2)^2}{4dt^2}, \frac{|t^4 - 5t^2 + 4 - d^2| - 2dt}{4dt}\right)$,且 $x, y \in N$.

证明 设 $n - 2 = t^2$,由方程(1)可得,

$$\frac{1}{2}[2x + (n-2)x(x-1)] = \frac{1}{2}[2y + y(y-1)], \qquad (2)$$

即

$$(2t^2x - t^2 + 2)^2 - t^2(2y+1)^2 = t^4 - 5t^2 + 4, \qquad (3)$$

设 $t^4 - 5t^2 + 4$ 的正因子为 d,则由(3)可得

$$2t^2x - t^2 + 2 + t(2y+1) = d, 2t^2x - t^2 + 2 - t(2y+1)] = \frac{t^4 - 5t^2 + 4}{d}, \qquad (4)$$

于是从(4)式即可得定理 1. 证毕.

由于对每个 n, $t^4 - 5t^2 + 4$ 的正因子 d 的个数是有限的,因此此时方程(1)仅有有限个解. 在定理 1 中令 $d = t^2 + 3t + 2$,或在 $2 \nmid t$ 时,令 $d = 2$,则可得

推论 1 方程(1)必定有解 $(x, y) = (1, 1)$;而当 $n-2$ 是平方数时,若 $2 \nmid t$,则方程(1)必有解 $(x, y) = \left(\frac{t^2 - 1}{8}, \frac{t^3 - 5t - 4}{8}\right)$.

由定理 1 还可得

推论 2 当 $n-2$ 是平方数且 $6 < n < 100$ 时,方程(1)除开平凡解 $(x, y) = (1, 1)$ 外,仅有其它解 $(n, x, y) = (27, 3, 12), (51, 6, 38), (66, 2, 11), (83, 10, 85)$.

推论 1 与推论 2 说明文献[4,6,7]中的定理 1 是错误的.

定理 2 当 $n-2$ 为非平方数时,方程(1)有无穷多组正整数解.

(下转第 90 页 Continue on page 90)

2003-11-21收稿.
* 四川省教育厅重点科研基金资助项目([1999]127号).

$$D^+ V(t) \leqslant -\mu m \sum_{i=1}^{n+m} | e^{v_i(t)} - 1 |).$$

因此,根据文献[6],我们知道系统(1)的 k周期解 $Z^*(t)$ 是全局吸引的 .

下证 k周期解是唯一的 . 设

$$Z(t) = (\bar{x}_1(t), \cdots, \bar{x}_n(t), \bar{x}_{n+1}(t), \cdots, \bar{x}_{n+m}(t))$$

是系统(1)的另一周期解,由上述证明过程可知:

$$|\bar{x}_1(t) - x_1^*(t)| + \cdots + |\bar{x}_n(t) - x_n^*(t)| + \cdots |\bar{x}_{n+1}(t) - x_{n+1}^*(t)| + \cdots + |\bar{x}_{n+m}(t) - x_{n+m}^*(t)| \to 0. (t \to +\infty),$$

从而 $\bar{x}_1(t) = x_1^*(t), \cdots, \bar{x}_n(t) = x_n^*(t), \bar{x}_{n+1}(t) = x_{n+1}^*(t), \cdots, \bar{x}_{n+m}(t) = x_{n+m}^*(t)$. 定理得证 .

参考文献

1 李传荣,卢松坚. N 种群周期系数非线性关系捕食-竞争系统的定性分析.高校应用数学学报, 1997, 12A(2): 147~156.

2 文贤章.多种群生态系捕食-竞争时滞系统正周期解的全局吸引性.数学学报, 2002, 45(1): 83~92.

3 Hale J K. Theory of Functional and Differential Equations, New York: Springer-verlag Heidelberg, 1977.

4 Kuang Yang. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics, New York: Academic Press Inc, 1993.

5 Burton T A. Lyapunov functionals and periodic solutions. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 53, In Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged, Hungary. 1997.

6 Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic, Dordrecht/Norwell, MA, 1992.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 85页 Continue from page 85)

证明 当 $n-2$ 为非平方数时,设 $n-2=D$,由(2)式得,

$$(2Dx - D + 2)^2 - D(2y+1)^2 = D^2 - 5D + 4, \tag{5}$$

设 Pell方程

$$u^2 - Dv^2 = 1 \tag{6}$$

的基本解为 $u_1 + v_1\sqrt{D}$,则对于任意 k,满足 $u + v\sqrt{D} = (u_1 + v_1\sqrt{D})^{2k}$ 的 (u, v) 也是(6)的解,且适合[5,6]

$$u \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2D), 2 | v. \tag{7}$$

又设 x_1, x_2 满足

$$x_1 + x_2\sqrt{D} = (D + 2 + 3\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}), \tag{8}$$

则有

$$x_1 = (D+2)u + 3Dv, x_2 = 3u + (D+2)v, \tag{9}$$

于是令 $2Dx - D + 2 = (D+2)u + 3Dv$, $2y + 1 = 3u + (D+2)v$,则

$$x = \frac{D(u+1) + 2(u-1)}{2D} + \frac{3v}{2}, y = \frac{(D+2)v}{2} + \frac{3u-1}{2}, \tag{10}$$

由(7)、(10)式可直接验证,(10)式是方程(5)即方程(1)的无穷多组正整数解. 证毕.

定理 2完全解决了当 $n-2$ 为非平方数时该方程的解的情况,而文献[4,6,7]中的(18)式中的 x 不能保证为正整数,因此其证明也是错误的 .

参考文献

1 Subramaniam K B. Ageneralization of triangular numbers. J Math Ed Sci Tech, 1992, 23: 790~793.

2 曹珍富.丢番图方程引论.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 1986. 155~160.

3 Di Porto A, Filipponi P. Some special triangular numbers and recurring sequences. Notes Number Theory Discrete Math, 1995, (1): 11~26.

4 郑英伟.关于方程 $S_x(n) = S_y(3)$. 江西科学, 1999, 17(3): 173~175.

5 余启港.关于方程 $S_x(n) = S_y(3)$ 的商榷.江西科学, 2001, 19(1): 31~33.

6 乐茂华.关于方程 $S_x(n) = S_y(3)$. 常德师范学院学报(自然科学版), 2002, 4: 1~2.

7 乐茂华.关于方程 $S_x(n) = S_y(3)$. 洛阳师范学院学报, 2003, 2: 9~10.

(责任编辑: 黎贞崇)