DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.002

广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 165~ 174

最小度至少是 5的图的控制数*

Domination Number of Graphs with Minimum Degree at Least Five

袁旭东　　曹建香　　袁春华

Yuan Xudong　Cao Jianxiang　Yuan Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路 3号　541004)

(Coll. of Math.& Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　设 G是 n个顶点的简单图.运用 Reed引进的顶点不交的路覆盖,找出图 G的一个控制集并估算这个控制集的基数,结合估算结果,证明如果图 G的最小度至少是 5,则图 G有基数至多是$\frac{5}{14}n$的控制集.

关键词　图　控制数　最小度　路覆盖

中图法分类号　O157.5

Abstract　Let G be a simple graph of n vertices. In this paper, by using the so-called vertex disjoint path cover introduced by Reed, we prove that the domination number is at most $\frac{5}{14}n$ for the graphs of minimum degree at least five.

Key words　graph, domination number, minimum degree, path cover

本文所考虑的是有限阶的简单图(无环无重边).设图 $G=(V(G),E(G))$, $V(G)$和 $E(G)$分别是 G的顶点集和边集.对于 $D\subseteq V(G)$,如果 $V(G)-D$中的任一顶点都与 D中的某点相邻,则 D称为图 G的控制集. G的控制数 V是 G中基数最小的控制集的基数.一般地,要计算图的控制数是 NP困难的[1].因此,用图的其它参数来估计图的控制数的上界成为人们关注的问题[2].

设 W是图 G的最小度, n是 G的顶点数. Ore首先证明:如果 W$\geqslant 1$,则 V$\leqslant \frac{n}{2}$. McCraig与 Shepherd在文献[3]证明:除了 7个例外图,每个最小度至少是 2的连通图的控制数至多是$\frac{2n}{5}$. Reed在文献[4]考虑了 W$\geqslant 3$的情形.通过引进顶点不交的路覆盖, Reed证明:如果 W$\geqslant 3$,则 V$\leqslant \frac{3n}{8}$.观察 W$\geqslant 1$, W$\geqslant 2$, W$\geqslant 3$的结果,一个自然的猜测是,如果 W$\geqslant k$, V$\leqslant \frac{k}{3k-1}n$能否成立[2].一般地, Caro和 Roditty[5,6]证明如下定理.

定理 **A**　对于任意的 n个顶点的图 G,

V$\leqslant n[1-$ W$(\frac{1}{\text{W}+1})^{1+\frac{1}{\text{W}}}]$.

容易看出,如果 W$\geqslant 7$,定理 A中的结果是比$\frac{k}{3k-1}n$更好的上界.因此,上述的猜测只余下 $k=4,5,6$三种情形.本文考虑 $k=5$的情形.仍采用 Reed的顶点不交的路覆盖,得到定理 1,证实了上述猜测.

1　主要结果

定理 **1**　设 G是 n个顶点的图且 W$\geqslant 5$.则 V$\leqslant \frac{5}{14}n$.

文中有关的符号和概念如下.图 $G=(V(G),E(G))$和 $x,y\in V(G)$, xy表示连接 x和 y的边.如果 $xy\in E(G)$,称 x与 y相邻, $N(x)$表示顶点 x的邻域; $X\subseteq V(G)$, $N(X)=\bigcup_{x\in X}N(x)$; $d(x)=|N(x)|$表示顶点 x的在 G中的度.如果 x与 y相邻,则也说 x控制 y,或 y控制 x; G的 1个子图 H称为是由 $U\subseteq V(G)$导出的子图;如果 $V(H)=U$且 $xy\in E(H)$当且仅当 $xy\in E(G)$; $|G|$表示图 G的顶点数;如果 A是 1个集合,则用 $|A|$表示它的基数.

G中的一组顶点不交的路 $P_1,\cdots,P_k$,如果满足 $V(G)=V(P_1)\cup\cdots\cup V(P_k)$,则称为 G的 1个顶点不交的路覆盖,简称为 G的 1个 vdp-覆盖. 1条路 P

2003-12-26收稿, 2004-04-04修回。

* 广西青年科研基金(桂青科 0135028)和国家自然科学基金(10171022)资助项目。

被称为 0-路如果 $|P| = 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ 成立.类似地,定义 P 是 1-路或 2-路如果 $|P| = 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ 或 $|P| = 2 (\mathrm{mod}\ 3)$.设 S 是 G 的 1个 vdp-覆盖,用 $S_i (i = 0, 1, 2)$ 表示 S 中 i-路的集合.设 $P = P'xP''$,P',P'' 分别是 1条 i-路和 1条 j-路(x 既不在 P' 中也不在 P'' 中),则 x 被称为 P 中的 1个 (i,j)-点.设 $P \in S$ 且 x 是 P 的 1个端点.如果 x 与不在 P 中的某点相邻,则 x 被称为是 P 的 1个出端点;如果 P 是 1条 2-路且 x 不是 P 的出端点,当 x 与 P 的某个 $(2, 2)$-点相邻时,则被称为是 P 的 $(2, 2)$-端点.

2 运用路覆盖找控制集

设 G 是 n 个顶点的图且最小度 $\delta \geqslant 5$.不妨设 G 是连通图.取 G 的 1个 vdp-覆盖,大致上,控制集是从每条路中每 3个点取一点.为了取得尽可能小的控制集,选取满足一定条件的 vdp-覆盖.选取 G 的 1个 vdp-覆盖 $S = \{P_1, \cdots, P_k\}$,设 $S_i (i = 0, 1, 2)$ 是 S 中 i-路的集合,使得 S 满足下述条件(1)~(4).

(1) $2|S_1| + |S_2|$ 最小;

(2) 在满足(1)的情况下使 $|S_2|$ 最小;

(3) 在满足(2)的情况下使 $\sum_{P_i \in S_0} |P_i|$ 最小;

(4) 在满足(3)的情况下使 $\sum_{P_i \in S_1} |P_i|$ 最小.

设 P_i 是 S 中的 1条 1-路或 2-路,x 是 P_i 的 1个端点.P_j 是 S 中不同于 P_i 的 1条路且包含 1个点 y 与 x 相邻.设 $P_j = P_j' y P_j''$.本文有如下断言.

断言 1[4] P_j 不是 1-路.如果 P_j 是 0-路,则 P_j' 与 P_j'' 都是 1-路.如果 P_j 是 2-路,则 P_j' 与 P_j'' 都是 2-路.

在选取 $S = \{P_1, \cdots, P_k\}$ 之后,通过重新调整 S 中的每条路,取 P_i' 是 $V(P_i)$ 所导出的子图上的 1条 Hamilton路,能得到另一个 vdp-覆盖.取这样的 vdp-覆盖 $S' = \{P_1', \cdots, P_k'\}$,使得 S' 中的路上的出端点的总数目最大,在满足这个条件的前提下使路上的 $(2, 2)$-端点的总数目最大.显然,S' 仍然满足条件(1)~(4).方便起见,仍用 $S = \{P_1, \cdots, P_k\}$ 来记最后所得到的 vdp-覆盖.为描述所选取的控制集,还需要一些定义.

对 S 中每条含有出端点的 1-路 P,选 1个 $y \notin P$ 使得 y 与 P 的 1个出端点相邻,称 y 是 P 的接受点;对 S 中每条含有 2个出端点的 2-路 P,给每个出端点选 1个 $y \notin P$ 使得与之相邻,称 y 是 P 中对应出端点的接受点;对 S 中每条恰含有 1个出端点的 2-路 P,如果 $|P| \leqslant 11$,选 1个 $y \notin P$ 使得 y 与 P 的出端点相邻,也称 y 是 P 的接受点.如果 S 中的 1条路含有接受点,则称这条路是接受路.现在递归地确定 1个 2-路的集合 A.初始时,A 是 S 中接受 2-路的集合(由断言 1,无接受 1-路).如果 A 中有 1条路 P 含有出端点且未选取接受点,选 1个 $y \notin P$ 与这个出端点相邻,也称 y 是这个出端点的接受点.如果这个接受点在以前的非接受 2-路 P' 上,添加 P' 进 A.继续这一过程直到 A 中的每条路的出端点都有接受点.由于 G 是有限图,A 是确定的集合.确定 A 后,为 A 中每条路 P 的 $(2, 2)$-端点 x,在 P 中取 1个与 x 相邻的 $(2, 2)$-点 y,称 y 是 x 的内接受点.对每条接受 2-路 P,进行 1个划分,分 $P = P_1 P_2 P_3$,使得 P_1,P_3 都是 1-路且都不含接受点以及内接受点,并且相对于这些性质是极大路.这里称 P_1,P_3 是 P 的端路,P_2 是 P 的中路.注意,由 P_1,P_3 的极大性和断言 1,如果中路 P_2 上一点 x 相邻 P_2 的 1个端点,则 x 是 1个接受点或内接受点.

断言 2 设 P 是 S 中恰好含有 1个出端点 x 的 1条 2-路.如果 $|P| \leqslant 11$,则 $V(P)$ 有 1个至多 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点的子集控制 $V(P) - \{x\}$.

断言 2将在下一节证明(引理 3).现先选取控制集.

(1) 对 S 的每条 0-路 P,取 P 的所有 $(1, 1)$-点放进 D;

(2) 对 S 的每条接受 2-路 P,取 P 的中路上所有 P 的 $(2, 2)$-点放进 D;

(3) 对每条含有出端点的 1-路 P,设 $x \in P$ 是选取了接受点的出端点.在 P 中取 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点控制 $P - \{x\}$,把这些点放进 D.对每条有 2个出端点的非接受 2-路 P,在 P 中取 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点控制 P 的内部点,把这些点放进 D.对每条恰有 1个出端点 x 的非接受 2-路 P 且 $|P| \leqslant 11$,在 P 中取 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点控制 $P - \{x\}$(由断言 2是可行的),把这些点放进 D.

(4) 对每条不含有出端点的 1-路 P,取控制 $V(P)$ 的 $V(P)$ 的 1个子集.如果可能,取 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点,否则取 $[\frac{|P|}{3}] + 1$ 个点,把这些点放进 D.对每条不含出端点的或恰有 1个出端点且顶点数至少是 14的非接受 2-路 P,取控制 $V(P)$ 的 $V(P)$ 的 1个子集.如果可能,取 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点,否则取 $[\frac{|P|}{3}] + 1$ 个点,把这些点放进 D;

(5) 对接受 2-路 P 的每条端路 P_1,如果 P 与 P_1 的公共端点 x 与由 1或 2选进 D 的点相邻,取 P_1 的 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点控制 P_1 中其余的点,把这些点放进 D.如

果 x 不与由 1或 2选进 D 的点相邻,取一组点控制 P_1,如果可能,取 $[\frac{|P|}{3}]$个点,否则取 $[\frac{|P|}{3}]+1$个点,把这些点放进 D.

通过这 5步所得到的 D,容易证明是 G的 1个控制集[4].为估算 D中的点数,这里定义下面一些集合.

O_1: $P\in S_1$,且 P有出端点或者 $V(P)$的导出子图含有至多 $[\frac{|P|}{3}]$个点的控制集;

O_2: P是非接受 2-路,且或者有 2个出端点,或者 $V(P)$ 的导出子图含有至多 $[\frac{|P|}{3}]$个点的控制集,或者 P 恰有一个出端点且 $|P|\leqslant 11$.

I_1: S中不在 O_1中的所有 1-路.

I_2: S中不在 O_2中的非接受 2-路.

W: 接受 2-路的选取了内接受点的 $(2,2)$-端点,W: 接受 2-路的含有选取了内接受点的 $(2,2)$-端点的端路.

E: 接受 2-路 P的满足下面条件的端路 P_1,P_1与 P的公共端点既不是出端点也不是 $(2,2)$-端点,且 $V(P_1)$不能被 $[\frac{|P|}{3}]$个点控制.

容易得到,

$$|D| = \sum_{P\in O_1}\frac{|P|-1}{3} + \sum_{P\in O_2}\frac{|P|-2}{3} + \sum_{P\in I_1}\frac{|P|+2}{3} + \sum_{P\in I_2}\frac{|P|+1}{3} + \sum_{P\in S_0}\frac{|P|}{3} + \sum_{P\in A}\frac{|P|-2}{3} + |E|,$$

即

$$|D| = \frac{n}{3} - \frac{1}{3}|O_1| - \frac{2}{3}|O_2| + \frac{2}{3}|I_1| + \frac{1}{3}|I_2| - \frac{2}{3}|A| + |E|.$$

注意,A中每条路至少对应 1个 $O_1\cup O_2$中一条路的端点,或者 1个接受 2-路的不在 $E\cup W$ 中的端路的端点,因此,$|A|\leqslant|O_1|+2|O_2|+2|A|-|E|-|W|$,即有,$|E|\leqslant|O_1|+2|O_2|+|A|-|W|$.另外,$|E|\leqslant 2|A|-|W|$.所以,

$$|D|\leqslant\frac{n}{3}+\frac{2}{3}|I_1|+\frac{1}{3}|I_2|+\frac{|E|}{2}-\frac{|W|}{2}.$$

对 E中的任意元素 T,设 P_T是包含 T的接受 2-路.再定义 E的 1个子集 E'.$E'=\{T\in E|P_T$的不在 T上的端点不在 W中$\}$.

显然,$|E'|\geqslant|E|-|W|$,因此

$$|D|\leqslant\frac{n}{3}+\frac{2}{3}|I_1|+\frac{1}{3}|I_2|+\frac{1}{2}|E'| \qquad (*)$$

在下一节将证明 3个引理,结合$(*)$式,本文得到 $|D|\leqslant\frac{5}{14}n$.

3 长度较短的 1路

本节将证明满足一定条件且长度较短的 1-路 P 有 $[\frac{|P|}{3}]$个点的控制集.先叙述 3个简单命题.

命题 1 设 $P=x_1x_2\cdots x_{3k+1}(k\geqslant 1)$是 1条路.如果 x_1还与某 1个 $x_{3i}(1\leqslant i\leqslant k)$相邻,则 $V(P)$有 1个 k个点的控制集.

命题 2 设 C是 $3k+1(k\geqslant 1)$个点的圈,$B=x_1x_2x_3$是 1条路且 $V(C)\cap V(B)=\varnothing$.如果 x_2与 C的任一点相邻,则 $V(C)\cup V(B)$有 1个 $k+1$个点的控制集.

命题 3 设 $P=x_1x_2\cdots x_{3k-1}(k\geqslant 1)$是 1条路,$x\notin P$.如果 x与$\bigcup_{i=1}^{k}\{x_{3i-2},x_{3i-1}\}$中某一点相邻,则 $V(P)\cup\{x\}$有 1个 k个点的控制集.

容易证明命题 1~3成立.接下来用这 3个命题证明 2个引理.

引理 1 设 G的最小度至少为 5,$C=x_1x_2\cdots x_{3k+1}x_1(2\leqslant k\leqslant 5)$是 G中的圈,H是 $V(C)$在 G中的导出子图.假设 $V(C)$中的点满足下列条件:如果对任意的 $v\in V(C)$在图 H中有 1条 Hamilton路从 v到达 x_{3k+1},则 $N(v)\subseteq V(C)$.那么,H有 1个 k点控制集.

证明 $k=2$时,由于在图 H中沿圈 C有 Hamilton路从 x_1到 x_{3k+1},所以,$N(x_1)\subseteq V(C)$.因而 x_1与 H中 5个点相邻,所以 H有 1个 2点控制集.以下只对 $k=5$证明,对其它情形可用与之类似的方法证明得到.

设 $k=5$,则 $C=x_1x_2\cdots x_{16}x_1$,$x_{3k+1}=x_{16}$.方便起见,记 $C^{-}=x_1x_2\cdots x_{16}$.对于 $1\leqslant i,j\leqslant 16$,记 $x_iC^{-}x_j$(或 $x_jC^{-}x_i$)是 C^{-}在 x_i与 x_j之间的这一段路(包括 x_i,x_j).用反证法.假设 H没有 5点控制集,这里先得到一些关于 x_1的邻域的位置的信息,进而推出矛盾.

显然,在图 H中沿圈 C从 x_1,x_{15}都有 Hamilton路到达 x_{16},因而,$N(x_1)\subseteq V(C)$且 $N(x_{15})\subseteq V(C)$.注意,x_1与 x_{15}在圈 C中从位置上是关于 x_{16}对称的.因此,以下所得到的 x_1的邻域的性质对 x_{15}也对应成立.由命题 1,x_1与 $x_{3k}(1\leqslant k\leqslant 5)$不相邻,对应地,$x_{15}$与 $x_{3k+1}(0\leqslant k\leqslant 4)$不相邻.下面分 2步推出矛盾.

(Ⅰ) x_1与 x_7不相邻.

证明 如果 x_1与 x_7相邻,由于 x_9,x_{12}分别控制了 x_8,x_{10}和 x_{11},x_{13},对于 $x_{14}x_{15}x_{16}$和圈 $x_1C^{-}x_7x_1$,当 x_{15}与这个圈的任一点相邻时,运用命题 2可得到 H的 5点控制集,矛盾.因此,$N(x_{15})-\{x_{14},x_{16}\}\subseteq\{x_8,x_9,x_{11},x_{12}\}$.由于 x_{15}与 H中至少 5点相邻,所以,x_{15}或者与 x_8,x_9都相邻,或者与 x_{11},x_{12}都相邻.如果 x_{15}与 x_8,x_9都相邻,则在 H中有 Hamilton路从 x_{10}到 x_{16}(即 $x_{10}C^{-}x_{15}x_9C^{-}x_1x_{16}$),因此 $N(x_{10})\subseteq V(C)$.

这样,x_{10}必与圈 $C' = x_1x_2\cdots x_8x_{15}x_{16}x_1$ 的点相邻.对 $x_9x_{10}x_{11}$ 和 C' 运用命题 2可得到 H的 5点控制集,矛盾.如果 x_{15}与 x_{11}, x_{12}都相邻,类似可推出矛盾. (I) 证毕.

类似还可得到 x_1与 x_{10}, x_{13}不相邻.因而, $N(x_1) - \{x_2, x_{16}\} \subseteq \{x_4, x_5, x_8, x_{11}, x_{14}\}$.对称地, $N(x_{15}) - \{x_{14}, x_{16}\} \subseteq \{x_{12}, x_{11}, x_8, x_5, x_2\}$.

(II) x_1与 x_{14}不相邻.

证明 如果 x_1与 x_{14}相邻,由于 x_1控制了 x_2, x_{14}和 x_{16},由命题 3和假设,可推出 x_{15}只可能还与 x_{11}, x_8, x_5, x_2这些点相邻.如果 x_{15}与 x_{11}相邻,由于 H中有 Hamilton路从 x_{13}到 x_{16}(即 $x_{13}C^- x_1x_{14}C^- x_{16}$),所以 $N(x_{13}) \subseteq V(C)$,对 $x_{12}x_{13}x_{14}$和圈 $x_1C^- x_{11}x_{15}x_{16}x_1$运用命题 2可推出矛盾.否则, x_{15}与 x_2, x_5, x_8都相邻,因此, H中有 Hamilton路从 x_3到 x_{16}(即 $x_3C^- x_{15}x_2x_1x_{16}$),所以 $N(x_3) \subseteq V(C)$.现对 $x_2x_3x_4$和圈 $x_5C^- x_{14}x_1x_{16}x_{15}x_5$运用命题 2可导出矛盾. (II) 证毕.

由(II), x_1与 x_{14}不相邻,对称地, x_{15}与 x_2不相邻.现如果 x_1与 x_{11}相邻,由于 x_1, x_{13}分别控制了 x_2, x_{11}, x_{16}和 x_{12}, x_{14},则类似由命题 3可推出 $N(x_{15}) - \{x_{14}, x_{16}\} \subseteq \{x_5, x_8, x_{11}, x_{12}\}$.由前面的推理可知 x_{15}不与 x_{11}, x_{12}同时相邻,因此, x_{15}与 x_5, x_8都相邻.由于 x_{15}与 x_5相邻, H中有 Hamilton路从 x_6到 x_{16}(即 $x_6C^- x_{15}x_5C^- x_1x_{16}$),所以 $N(x_6) \subseteq V(C)$.如果 x_6与圈 $C_1' = x_1x_{11}C^- x_{15}x_{16}x_1$中某点相邻,对 $x_5x_6x_7$和 C_1'运用命题 2,再加上 x_3, x_9是 H的 5点控制集;否则,由命题 1, x_6和圈 $C_2' = x_8C^- x_{11}x_1x_{16}x_{15}x_8$某些点必相邻,对 $x_5x_6x_7$和 C_2'运用命题 2,再加上 x_3, x_{13}也得到 H的 5点控制集,矛盾.因此, x_1与 x_{11}也不相邻.

综上所述, x_1与 x_4, x_5都相邻,运用命题 2类似可得出矛盾.引理 1得证.

引理 2 设 G的最小度至少为 5, $C = x_1x_2\cdots x_{3k+2}x_1$ ($2 \leqslant k \leqslant 5$)是 G中的圈, H是 $V(C)$在 G中的导出子图.假设 $V(C)$中的点满足下列条件:如果对任意的 $v \in V(C)$在图 H中有 1条 Hamilton路从 v到达 x_{3k+2},则 $N(v) \subseteq V(C)$.那么, H有 k个点控制 $V(C) - \{x_{3k+2}\}$.

证明 下面只对 $k=5$证明,对其它情形可用类似的方法证明得到.

设 $k=5$,则 $C = x_1x_2\cdots x_{17}x_1$, $x_{3k+2} = x_{17}$.类似记 $C^- = x_1x_2\cdots x_{17}$.对于 $1 \leqslant i, j \leqslant 17$,记 $x_iC^- x_j$(或 $x_jC^- x_i$)是 C^- 在 x_i与 x_j之间的这一段路(包括 x_i, x_j).用反证法.假设 H没有 5点控制集,先得到一些关于 x_1的邻域的位置的信息,进而推出矛盾.

在图 H中沿圈 C从 x_1, x_{16}都有到 x_{17}的 Hamilton路,因而, $N(x_1) \subseteq V(C)$且 $N(x_{16}) \subseteq V(C)$.注意, x_1与 x_{16}在圈 C中从位置上是关于 x_{17}对称的.因此,以下所得到的 x_1的邻域的性质对 x_{16}也对应成立.由命题 1, x_1与 x_{3k}($1 \leqslant k \leqslant 5$)不相邻,对应地, x_{16}与 x_{3k-1}($1 \leqslant k \leqslant 5$)不相邻.下面分 5步证明.

(I) x_1与 x_{16}不相邻.

证明 假设 x_1与 x_{16}相邻,则 H中从 x_2, x_{15}都有 Hamilton路到 x_{17},所以, $N(x_2) \subseteq V(C)$, $N(x_{15}) \subseteq V(C)$.同引理 1的证明,可得到 x_1与 x_{13}, x_{10}不相邻,以及 x_{16}与 x_4, x_7不相邻.

如果 x_1还与 x_{14}相邻,则 x_{14}控制了 x_1, x_{13}和 x_{15},由命题 3,可得到 x_{16}与 x_{10}, x_{13}都相邻.因此, x_{13}控制了 x_{12}, x_{14}和 x_{16}.仍由命题 3可推出 $N(x_{15} - \{x_{14}, x_{16}\} \subseteq \{x_3, x_6, x_9, x_{12}, x_{17}\}$.从而, x_{15}必与 x_3, x_6, x_9, x_{12}中的一些点相邻.因此,由于 x_1控制了 x_2, x_{14}和 x_{16},由命题 3, H有 5个点控制 $V(C) - \{x_{17}\}$,矛盾.因此 x_1与 x_{14}不相邻,对应地, x_{16}与 x_3不相邻.

如果 x_1与 x_{11}相邻,则 x_{11}, x_{14}分别控制了 x_1, x_{10}, x_{12}和 x_{13}, x_{15},由命题 3,类似可推出 $N(x_{16}) - \{x_{15}, x_{17}\} \subseteq \{x_{10}, x_{12}, x_{13}\}$.运用命题 2可推出 x_{16}与 x_{12}, x_{13}不同时相邻.因此, x_{16}与 x_{10}必然相邻,且与 x_{12}, x_{13}中一点相邻.再看点 x_{15}.对路 $x_{15}C^- x_1x_{16}$用命题 1可推出 x_{15}与 x_{13}, x_{10}, x_1不相邻.又由于 x_1, x_{13}分别控制了 x_2, x_{11}, x_{16}和 x_{12}, x_{14},由命题 3,可推出 x_{15}与 x_3, x_6, x_9也不相邻.另外, x_{10}, x_{13}分别控制了 x_9, x_{11}, x_{16}和 x_{12}, x_{14},由命题 3可推出 $N(x_{15}) - \{x_{14}, x_{16}\} \subseteq \{x_{11}, x_{12}, x_{17}\}$.因此, x_{15}与 x_{11}, x_{12}都相邻.所以, $x_{13}C^- x_{15}x_{12}C^- x_1x_{16}x_{17}$是 H中 Hamilton路,因此, $N(x_{13}) \subseteq V(C)$.对 $x_{12}x_{13}x_{14}$和圈 $x_1C^- x_{11}x_{15}x_{16}x_1$运用命题 2可得到 H有 5个点控制 $V(C) - \{x_{17}\}$,矛盾.因此 x_1与 x_{11}也不相邻以及 x_{16}与 x_6也不相邻.

如果 x_1与 x_8相邻,则 x_1与 x_4, x_7都不相邻.否则,当 x_1与 x_4相邻时, $x_3C^- x_1x_4C^- x_{17}$是 H中 Hamilton路,因而 $N(x_3) \subseteq V(C)$.对 $x_2x_3x_4$和圈 $x_1x_8C^- x_{16}x_1$运用命题 2可推出 x_3与这个圈中的点不相邻.再对 $x_3C^- x_1x_4C^- x_{16}$用命题 1可推出, x_3与 x_5, x_7都相邻.从而, $\{x_3, x_7, x_{10}, x_{13}, x_{16}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$,矛盾.当 x_1与 x_7相邻时, $x_6C^- x_1x_7C^- x_{17}$是 H中 Hamilton路,因而 $N(x_6 \subseteq V(C)$.对 $x_5x_6x_7$和圈 $x_1x_8C^- x_{16}x_1$运用命题 2可推出 x_6与这个圈中的点不相邻.再对 $x_6C^- x_1x_7C^- x_{16}$用命题 1可推出, x_6与 x_2, x_3都相邻.这时, $x_4C^- x_6x_3C^- x_1x_7C^- x_{17}$是 H中 Hamilton路,因而 $N(x_4) \subseteq V(C)$.对 $x_3x_4x_5$和圈

$x_1x_2x_6C^- x_{16}x_1$运用命题 2可推出矛盾.因此,x_1与 x_4,x_7不相邻.所以,x_1与 x_5要相邻.这时需要再检查 x_{16}的邻域.分 3种情况讨论.

(i) 如果 x_{16}与 x_9相邻,则同 x_1可推出 x_{16}与 x_{12}要相邻.由于 $N(x_2)\subseteq V(C)$,这里来检查 x_2的相邻点.如果 x_2与 $\{x_6,x_9,x_{15},x_{17}\}$任意点相邻,则 H中有 1条 Hamilton路从 x_3到 x_{17}.例如 x_2与 x_6相邻时,$x_3C^- x_5x_1x_2x_6C^- x_{17}$是 H中有 1条 Hamilton路.因此,$N(x_3)\subseteq V(C)$.对 $x_3x_4x_5$和圈 $x_1x_5C^- x_{16}x_1$运用命题 2可得到矛盾.因此 x_2与这些点不相邻.再对 $x_2C^- x_{16}x_1x_{17}$用命题 1可推出,$N(x_2)-\{x_1,x_3\}\subseteq\{x_5,x_8,x_{11},x_{12},x_{14}\}$.由于 x_{16}控制了 x_1,x_9,x_{15},由命题 3,x_2与 x_{11},x_{14}也不相邻.因此,x_2与 x_5,x_8,x_{12}都相邻.因此,$Q_{11}'=x_{11}C^- x_2x_{12}C^- x_{16}x_1x_{17}$是 H的一条 it Hamilton路,从而,$N(x_{11})\subseteq V(C)$.类似地,对 $x_{10}x_{11}x_{12}$和圈 $x_1x_2C^- x_9x_{16}x_1$运用命题 2可推出 x_{11}与这个圈中的点不相邻.对 Q_{11}'用命题 1则可知 x_{11}与 x_{14},x_{15}都相邻.因此,$\{x_2,x_5,x_8,x_{11},x_{12}\}$控制 $V(C)-\{x_{17}\}$,矛盾.

(ii)如果 x_{16}与 x_{10}相邻,则 $x_{10}C^- x_{16}x_{10}$构成 7圈.由命题 2,x_2与这些点都不相邻.对 $x_2C^- x_{16}x_1x_{17}$用命题 1则可推出,$N(x_2)-\{x_1,x_3\}\subseteq\{x_5,x_6,x_8,x_9,x_{17}\}$.因此,$x_2$与 x_6,x_9,x_{17}至少一点相邻.同 (i) 一样可得到 H中有一条 Hamilton路从 x_3到 x_{17},同 (i) 的推理可得到矛盾.

(iii) 否则,x_{16}与 x_{12},x_{13}都相邻.$x_{14}C^- x_{16}x_{13}C^- x_1x_{17}$是 H中有 1条 Hamilton路,因此,$N(x_{14})\subseteq V(C)$.对 $x_{13}x_{14}x_{15}$和圈 $x_1C^- x_{12}x_{16}x_1$运用命题 2可得到矛盾.

综上所述,x_1与 x_8不相邻.因此 x_1与 $\{x_4,x_5,x_7\}$至少 2点相邻.从 (iii) 的推理可知 x_1与 x_4,x_5不同时相邻.所以,x_1与 x_7要相邻.对应地,x_{16}与 x_{10}要相邻.同 (ii) 的推理可知,$N(x_2)-\{x_1,x_3\}\subseteq\{x_5,x_6,x_8,x_9,x_{17}\}$.如果 x_2与 x_9相邻,则 $\{x_4,x_7,x_9,x_{11},x_{14}\}$控制 $V(C)-\{x_{17}\}$,矛盾.如果 x_2与 x_5,x_6都相邻,则 $x_4C^- x_2x_5C^- x_{16}x_1x_{17}$是 H中有 1条 Hamilton路,因此,$N(x_4)\subseteq V(C)$.对 $x_3x_4x_5$和 $x_1x_2x_6C^- x_{16}x_1$运用命题 2可推出矛盾.否则,x_2与 x_{17}必然相邻.同对 x_2的推理,也可推出 x_{15}与 x_{17}必然相邻.由于 x_{17}控制 x_1,x_2,x_{15},x_{16},H有 5个点控制 $V(C)-\{x_{17}\}$,矛盾.因此 x_1与 x_{16}不相邻.(I)证毕.

(II) x_1与 x_{14}不相邻,x_{16}与 x_3不相邻.

证明 假设 x_1与 x_{14}相邻.由于 x_{14}控制了 x_1,x_{13},x_{15},由命题 3可得 $N(x_{16})-\{x_{15},x_{17}\}\subseteq\{x_4,x_7,x_{10},x_{13}\}$.如果 x_{16}与 x_{13}相邻,则 $Q_2'=x_2C^- x_{13}x_{16}C^- x_{14}x_1x_{17}$是 H中有 1条 Hamilton路,因此,$N(x_2)\subseteq V(C)$.由于 $d(x_{16})\geqslant 5$,x_{16}与 x_4或 x_7还相邻.对于 $x_1x_2x_3$和圈 $x_4C^- x_{16}x_4$(或 $x_7C^- x_{16}x_7$)运用命题 2可推出 x_2与 x_{17}相邻.由于 x_2与 x_1相邻,$Q_2'\cup\{x_2x_{17}\}$是 H一条 Hamilton圈,则这是与(I)同样的情形,同理可导出矛盾.因此,x_{16}与 x_{13}不相邻.所以,x_{16}与 x_4,x_7,x_{10}都相邻.则 $Q_5'=x_5C^{x}_{16}x_4C^- x_1x_{17}$是 H中有 1条 Hamilton路.因此,$N(x_5)\subseteq V(C)$.对 $x_4x_5x_6$和圈 $x_7C^- x_{16}x_7$运用命题 2可知 x_5与这个圈中的点不相邻.对 $Q_5'-\{x_{17}\}$用命题 1可推出 x_5与 x_3,x_1,x_{17}都相邻.由于 x_5与 x_1相邻,$Q_5'\cup\{x_5x_{17}\}$是 H一条 Hamilton圈,则这也是与(I)同样的情形,同理可导出矛盾.因此,x_1与 x_{14}不相邻,对称地,x_{16}与 x_3不相邻.(II)证毕.

(III) x_1与 x_{13}相邻,x_{16}与 x_4不相邻.

证明 假设 x_1与 x_{13}相邻.则 x_{16}与 x_{12}不相邻,否则 $x_{15}C^- x_{13}x_1C^- x_{12}x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,对 $x_{14}x_{15}x_{16}$和圈 $x_1C^- x_{13}x_1$运用命题 2可得到矛盾.(由此可知 H中不能有从 x_{15}到达 x_{17}的 Hamilton路).另一方面,$x_{12}C^- x_1x_{13}C^- x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,因此,$N(x_{12})\subseteq V(C)$.由此,通过运用命题 1和 2可推出 x_1与 x_{10}不相邻.现再检查 x_1与其它点的情况.

如果 x_1与 x_{11}相邻,则 x_{16}与 x_{10}不相邻(否则 $x_{15}C^- x_{11}x_1C^- x_{10}x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,矛盾).由于 x_{11},x_{14}分别控制了 x_1,x_{10},x_{12}和 x_{13},x_{15},由命题 3,可得到 x_{16}与 x_4,x_7,x_{13}都相邻.类似于(II)的推理可得到矛盾.因此,x_1与 x_{11}不相邻.

如果 x_1与 x_8相邻,类似地用命题 3可得到 $N(x_{16})-\{x_{15},x_{17}\}\subseteq\{x_4,x_9,x_{10},x_{13}\}$.容易证明 x_{16}与 x_9,x_{10}不同时相邻(否则 $x_{15}C^- x_{10}x_{16}x_9C^- x_1x_{17}$是 H的 Hamilton路,矛盾).因此,x_{16}与 x_4,x_{13}都相邻.注意这时 x_1还与 x_4,x_5,x_7中一点相邻.如果 x_1与 x_5或 x_7也相邻,则 $x_2C^- x_4x_{16}C^- x_5x_1x_{17}$或 $x_2C^- x_7x_1x_8C^- x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,因此,$N(x_2)\subseteq V(C)$.对 $x_1x_2x_3$和圈 $x_4C^- x_{16}x_4$运用命题 2可得到矛盾.否则 x_1与 x_4相邻.则 $x_3C^- x_1x_4C^- x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,因此,$N(x_3)\subseteq V(C)$.由于 $N(x_1)\supseteq\{x_2,x_4,x_{13}\}$以及 $N(x_1)\supseteq\{x_2,x_4,x_8\}$,两次运用命题 3可推出 $N(x_3)-\{x_2,x_4\}\subseteq\{x_7,x_{14},x_{17}\}$.这时,$x_{15}C^- x_8x_1C^- x_3x_7C^- x_4x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路,同样得到矛盾.因此,x_1与 x_8不相邻.

如果 x_1与 x_7相邻,则 $x_1C^- x_7x_1$是 7圈.运用命题 1和命题 2,可推出 $N(x_{12})-\{x_{11},x_{13}\}\subseteq\{x_8,x_9,x_{14},$

$x_{17}\}$. 如果 x_{12} 与 x_8, x_9 都相邻，则 $x_{10}\vec{C}x_{12}x_9\vec{C}x_1x_{13}\vec{C}x_{16}x_{17}$ 是 H的 Hamilton路，运用命题 2和命题 1可推出，x_{10}与 x_{16}, x_{17}都相邻，这是与(Ⅰ)相同的情形，矛盾．否则 x_{12} 与 x_{14}, x_{17}都相邻．这时 x_{14} 控制了 x_{12}, x_{13}, x_{15}，由命题 3和前述的结论，x_{16} 则与 x_6, x_9, x_{13} 都相邻．因此，$x_{15}x_{14}x_{12}\vec{C}x_1x_{13}x_{16}x_{17}$ 是 H 的 Hamilton路，矛盾．

综上所述，则 x_1与 x_4, x_5都相邻，则 $x_3\vec{C}x_1x_4\vec{C}x_{16}x_{17}$ 是 H的 Hamilton路．类似于上一段的 x_{10}的情形对 x_3 讨论可得到矛盾．因此，x_1 与 x_{13} 相邻，对称地，x_{16} 与 x_4 不相邻．(Ⅲ)证毕．

(Ⅳ) x_1 与 x_{11} 不相邻，x_{16}与 x_6 不相邻．

证明　假设 x_1与 x_{11} 相邻．由于 x_{11}, x_{14}分别控制 x_1, x_{10}, x_{12} 和 x_{13}, x_{15}，由命题 3可得 $x_6, x_9 \notin N(x_{16})$．由(Ⅰ)～(Ⅲ)的结论有 $N(x_{16}) - \{x_{15}, x_{17}\} \subseteq \{x_7, x_{10}, x_{12}, x_{13}\}$．如果 x_{16} 与 x_7, x_{10}都相邻，则 $Q_2' = x_2\vec{C}x_{10}x_{16}\vec{C}x_{11}x_1x_{17}$ 是 H 的 Hamilton路，所以 $N(x_2) \subseteq V(C)$．对 $x_1x_2x_3$ 和圈 $x_7\vec{C}x_{16}x_7$ 运用命题 2可知 x_2 与这个圈上的点不相邻．对 $Q_2' - \{x_{17}\}$ 运用命题 1可推出 x_2与 x_{17}相邻，则这是与(Ⅰ)相同的情形，矛盾．如果 x_{16} 与 x_{10}, x_{12}, x_{13} 都相邻，则 $Q_{14}' = x_{14}\vec{C}x_{16}x_{13}\vec{C}x_1x_{17}$ 是 H的 Hamilton路，所以 $N(x_{14}) \subseteq V(C)$．对 $x_{13}x_{14}x_{15}$和圈 $x_1\vec{C}x_{10}x_{16}x_{12}x_{11}x_1$ 运用命题 2可得到矛盾．如果 x_{16}与 x_7, x_{12}, x_{13} 都相邻，同样有 $N(x_{14}) \subseteq V(C)$．对 $x_{13}x_{14}x_{15}$和圈 $x_1\vec{C}x_7x_{16}x_{12}x_{11}x_1$ 运用命题 2可推出 x_{14} 与这个圈中的点不相邻，对 $x_{13}x_{14}x_{15}$和圈 $x_7\vec{C}x_{12}x_{16}x_7$运用命题 2可推出 x_{14}与这个圈中的点不相邻，矛盾．(Ⅳ)证毕．

(Ⅴ) x_1 与 x_{10} 不相邻，x_{16}与 x_7 不相邻．

证明　假设 x_1 与 x_{10}相邻．如果 x_{16} 与 x_9相邻，则 $Q_{15}' = x_{15}\vec{C}x_{10}x_1\vec{C}x_9x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_{15}) \subseteq V(C)$．对 $x_{14}x_{15}x_{16}$和圈 $x_1\vec{C}x_{10}x_1$ 运用命题 2可推出 x_{15} 与这个圈中的点不相邻，运用命题 1可推出 x_{15} 与 x_{13} 不相邻．所以，x_{15}与 x_{11}, x_{12}, x_{17} 都相邻．这里看 $Q_{15}' \cup \{x_{15}x_{17}\}$，由于 x_{15} 与 x_{16} 相邻，这是与(Ⅰ)相同的情形，矛盾．如果 x_{16} 与 x_{12}, x_{13}都相邻，则 $x_{15}\vec{C}x_{13}x_{16}x_{12}\vec{C}x_1x_{17}$是 H的 Hamilton路，同上面的推理可得到 x_{15} 与 x_{11}, x_{12}, x_{17} 都相邻，则有 $\{x_2, x_5, x_8, x_{11}, x_{13}\}$ 控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．否则，由(Ⅰ)～(Ⅳ)的结论，x_{16} 与 x_7, x_{10}都相邻．因此 $Q_8' = x_8\vec{C}x_{16}x_7\vec{C}x_1x_{17}$是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_8) \subseteq V(C)$．对 $x_7x_8x_9$ 和圈 $x_{10}\vec{C}x_{16}x_{10}$ 运用命题 2可推出 x_8与这个圈中的点不相邻．由命题 1, x_8与 x_5, x_2不相邻．因此，$N(x_8) - \{x_7, x_9\} \subseteq \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_{17}\}$．当 x_8 与 x_6 相邻时，$\{x_1, x_4, x_8, x_{12}, x_{15}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$；而当 x_8 与 x_3, x_4都相邻时，$\{x_1, x_6, x_8, x_{12}, x_{15}\}$ 控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．因此，x_8与 x_1, x_{17}都相邻，这也是与(Ⅰ)相同的情形，矛盾．(Ⅴ)证毕．

由(Ⅰ)～(Ⅴ)的结论，有 $N(x_1) - \{x_2, x_{17}\} \subseteq \{x_4, x_5, x_7, x_8\}$，$N(x_{16}) - \{x_{15}, x_{17}\} \subseteq \{x_9, x_{10}, x_{12}, x_{13}\}$．由于 $d(x_1) \geqslant 5$，余下只需考虑 2种情况．

先设 x_1与 x_8相邻．则 x_1还与 $\{x_4, x_5, x_7\}$中至少 2个点相邻．分情况如下：

(ⅰ) x_1与 x_5, x_7都相邻．这时，$x_6\vec{C}x_1x_7\vec{C}x_{16}x_{17}$是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_6) \subseteq V(C)$．由于 x_1控制 x_2, x_5, x_7, x_8，且 x_{16}与 x_9 或 x_{10}相邻，当 x_6与 x_3或 x_4 或路 $x_9\vec{C}x_{16}$ 中任一点相邻时，容易找出 $V(C) - \{x_{17}\}$的 5点控制集．因此，可推出 x_6与 x_2, x_8都相邻．因此，$x_3\vec{C}x_5x_1x_2x_6\vec{C}x_{16}x_{17}$ 是 H的 Hamilton路，从而，$N(x_3) \subseteq V(C)$．由于 x_5, x_6 控制了 x_1, x_2, x_4, x_7, x_8，且 x_{16}与 x_9或 x_{10} 相邻，因此可推出 x_3与 x_7, x_8都相邻．从而 $\{x_3, x_5, x_{10}, x_{13}, x_{15}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．

(ⅱ)如果 x_1与 x_4, x_7相邻，则 $x_3\vec{C}x_1x_4\vec{C}x_{16}x_{17}$和 $x_2\vec{C}x_7x_1x_8\vec{C}x_{16}x_{17}$ 都是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_2) \subseteq V(C)$，$N(x_3) \subseteq V(C)$．类似(ⅰ)可推出 x_3与 x_7, x_8 相邻，x_2 与 x_5, x_8 相邻．从而，$\{x_5, x_8, x_{11}, x_{14}, x_{16}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．

(ⅲ) x_1 与 x_4, x_5都相邻，则 $x_3\vec{C}x_1x_4\vec{C}x_{16}x_{17}$ 和 $x_2\vec{C}x_4x_1x_5\vec{C}x_{16}x_{17}$ 都是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_2) \subseteq V(C)$，$N(x_3) \subseteq V(C)$．类似(ⅰ)则可得到 x_3 与 x_5, x_8相邻且 x_2与 x_5相邻．因此，$\{x_5, x_8, x_{11}, x_{14}, x_{15}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．

因此，x_1与 x_8不相邻，对称地，x_{16}不与 x_9相邻，则 x_1与 x_4, x_5, x_7都相邻，x_{16}与 x_{10}, x_{12}, x_{13}都相邻．这时，$x_3\vec{C}x_1x_4\vec{C}x_{16}x_{17}$ 是 H的 Hamilton路，因此，$N(x_3) \subseteq V(C)$．对 $x_2x_3x_4$ 与圈 $x_1x_5\vec{C}x_7x_1$ 以及 $x_{10}\vec{C}x_{16}x_{10}$两次运用命题 2，则可推出 $N(x_3) - \{x_2, x_4\} \subseteq \{x_8, x_9, x_{17}\}$，因此，$x_3$ 与 x_9 相邻．从而 $\{x_1, x_6, x_9, x_{12}, x_{15}\}$控制 $V(C) - \{x_{17}\}$，矛盾．引理 2得证．

1个拉索就是将 1条路的 1个端点与 1个圈的任一点粘合而得到的图．这条路的另一端点称为拉索的端点，路与圈的公共点称为拉索的连接点，圈称为拉索的圈．在以下仍假设第 2节的条件和用第 2节中的定义和记号，并证明一些定理 1所需的结论．

引理 3　设 P是含有至多 1个出端点的非接受 2-路且 $|P| \leqslant 11$．则 $V(P)$有 1个至多 $[\frac{|P|}{3}]$个点的子集控制 P的除了可能的出端点以外的所有点．

证明　显然,引理 3可推出断言 2.这里仅对 $|P| = 11$证明,其余情况类似可得.设 $V(P)$的导出子图为 H.

首先设 P无出端点.这里要推出 H有 3个点的控制集.如果 $|G| = 11$,即有 $G = H$,容易得到结论.

事实上,如果 H有一点的度至少为 8,则容易看出 H有 3个点的控制集.如果 H的最大度为 7,设 v是 H中的点且度为 7,w_1, w_2, w_3是不与 v相邻的点.如果 w_1, w_2相邻,则 $\{v, w_1, w_3\}$是 H的 3个点的控制集.否则,据对称性可设 w_1, w_2, w_3任两点都不相邻.由于 H的最小度是 5,因而 v的邻域中有一点与 w_1, w_2, w_3中的 2点相邻.设这一点为 v_1,与 w_1, w_2相邻,则 $\{v, v_1, w_3\}$是 H的 3个点的控制集.如果 H的最大度为 6,设 v是 H中的点且度为 6,w_1, w_2, w_3, w_4是不与 v相邻的点.如果 w_1, w_2, w_3, w_4之间连接有至少 2条边,则 w_1, w_2, w_3, w_4可由 2个点控制,从而 H有 3个点的控制集.否则,w_1, w_2, w_3, w_4之间至多连接一条边.简单计算可知,这时 v的邻域中一定有一点 v_1与 w_1, w_2, w_3, w_4的至少 3点相邻,类似可得 H有 3个点的控制集.由于 $|H| = 11$,不可能是 5正则图,这样就证明了结论.

如果 $|G| > 11$,由于 G连通,$V(P)$中有一点 x与 $V(G) - V(P)$中一点相邻.如果 H有 Hamilton圈,则 $V(P)$的任一点均是 H的 1条 Hamilton路的端点,因此 x是 H的 1条 Hamilton路 P'的出端点,令 $S' = S - \{P\} \cup \{P'\}$.由于选取 S是使得其出端点的总数目最大,S'比 S的出端点的数目多,因而与 S的选取矛盾.因此 H无 Hamilton圈.现选取 H中的拉索使得拉索的圈最长.设连接点为 v.简单起见,记拉索的端点为 x_{11},沿拉索的一条 Hamilton路顺序标记顶点为 $x_{11}, x_{10}, \cdots, x_1$.由假设,$x_1, x_{11}$不是出端点,因此 x_1, x_{11}只与 $V(P)$中的顶点相邻,且 x_1, x_{11}不相邻.显然,x_1与 v相邻,由 $d(x_1) \geqslant W \geqslant 5$,$v \in \{x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$.分情况讨论如下.

(i) $v = x_{10}$.此时,如果 x_1与 x_6相邻,则 x_{11}与 x_5不相邻(否则 H有 Hamilton圈).另外,由于 $\{x_2, x_6, x_{10}\} \subseteq N(x_1)$,如果 x_{11}与 x_4或 x_8相邻,则 $\{x_1, x_4, x_8\}$是 H的 3点控制集;又由于 $\{x_1, x_5, x_7\} \subseteq N(x_6)$,如果 x_{11}与 x_3或 x_9相邻,则 $\{x_3, x_6, x_9\}$控制 $V(P)$,结论成立.否则,$N(x_{11}) \subseteq \{x_2, x_6, x_7, x_{10}\}$,即 $d(x_{11}) \leqslant 4$,矛盾.类似可推出,当 x_1与 x_3或 x_9相邻时,H有 1个 3点控制集.如果 x_1与 x_3, x_6, x_9均不相邻,则 x_1与 $\{x_4, x_5, x_7, x_8\}$的至少 3个点相邻.假设 x_1与 x_7, x_8相邻以及 $\{x_4, x_5\}$的一点相邻,这时从 x_2, x_6, x_7以及 $\{x_3, x_4\}$的一点都 H的 Hamilton路到达 x_{11},从而 x_{11}不与这些点相邻.由于 $v = x_{10}$,x_1与 x_9在拉索的圈上的位置是对称的,因而 x_{11}与 x_9也不相邻,从而 $d(x_{11}) \leqslant 4$,矛盾.类似可推出在 x_1与 x_4, x_5相邻以及 $\{x_7, x_8\}$的一点相邻时 $d(x_{11}) \leqslant 4$成立,矛盾.从而 H有 3个点的控制集.

(ii) $v = x_9$.由于选取拉索使得其圈最长,所以 x_{11}与 x_1, x_2不相邻.对称地,x_{11}与 x_7, x_8不相邻.如果 x_{11}与 x_9相邻,则 $\{x_3, x_6, x_9\}$控制 $V(P)$.否则,x_{11}与 x_3, x_4, x_5, x_6都相邻,这时,$\{x_1, x_8, x_{11}\}$控制 $V(P)$.

(iii) 对于 $v = x_6, x_7, x_8$时,都可类似于(ii)的推理推出 H有 1个 3点的控制集.

其次考虑 P有 1个出端点的情形.设 u, w是 P的 2个端点,u是 P的出端点.这时 w不是出端点,因此 w只与 P中的点相邻.这样 H中有以 u为端点的拉索,但它也可能是 H的 Hamilton圈.取 H中以 u为端点的拉索 L且使得拉索的圈最长.同样,以拉索 L的端点 u为起点,沿 L的 1条 Hamilton路顺序标记为这条路的顶点为 $x_{11}, x_{10}, \cdots, x_1$.设 L的连接点为 v(可能是 x_{11}).如果 x_1与 $\{x_3, x_6, x_9\}$的一点相邻,由命题 1,$V(P) - \{x_{11}\}$可由 3点控制.因此不妨设 x_1与这些点都不相邻.由于 $d(x_1) \geqslant 5$,$v = x_{3k+1}$ or $v = x_{3k+2}$,这里 $2 \leqslant k \leqslant 3$.设拉索的圈为 C.注意这时 C中的任一点 x如果有一条路从 x通过 C所有的点到达 v,则从 x有 1条 H的 Hamilton路到达 x_{11},因此,$N(x) \subseteq V(P)$.又由于选取拉索是使得其圈最长,因而 $N(x) \subseteq V(C)$,即,C中的任一点 x满足引理 1或引理 2的假设.运用引理 1或引理 2,容易得到 $V(P) - \{x_{11}\}$可由 3点控制.

引理 4　设 $T \in E'$是 A中的一条 2-路 P的端路,则 $|T| \geqslant 19$.

证明　设 $T = a_0 \cdots a_j \in E'$和 $C = c_0 \cdots c_l$分别是 A中的 2-路 P的一条端路和中路.设 c_0与 a_j在 P中相邻.由已知,c_1是接受点或内接受点.由于 $T \in E'$,P不含有(2, 2)-端点,因此 c_1是接受点.这里先叙述一个断言[4].

断言 3　a_0只与 $V(T) \cup \{c_0\}$中的点相邻.

由 S的取法和断言 3,如果 $a_0' \cdots a_j'$是 $V(T)$上的 1条 Hamilton路,使得 a_j'与 c_0相邻,则 a_0'也只与 $V(T) \cup \{c_0\}$中的点相邻.

假设 $|T| < 19$,由于 $T \in E'$,T中的点不能被 $[\frac{|T|}{3}]$个点控制,这里将推出矛盾.由于 T是 1-路,$|T| = 3m + 1(0 \leqslant m \leqslant 5)$.设 H是由 $V(T) \cup \{c_0\}$导出的子图.由于 a_0只与 $V(T) \cup \{c_0\}$中的点相邻,H中有以 c_0为端点的拉索.取 H中的以 c_0为端点的

拉索 L_1 使拉索的圈最长.设 L_1 的连接点为 v.同样从 L_1 的端点 c_0 沿拉索的 1条 Hamilton路顺序标记这条路的顶点为 $x_{3m+2},x_{3m+1},\cdots,x_1$.由命题 1,$x_1$ 与 x_{3k}($1\leqslant k\leqslant m\leqslant 5$)不相邻.由于 $d(x_1)\geqslant 5$ 且 x_1 不是出端点,则 $v=x_{3k+1}$ 或 $v=x_{3k+2}$,这里 $2\leqslant k\leqslant m\leqslant 5$.设拉索 L_1 的圈为 C.同理可推出,C 中的任一点 x 满足引理 1或引理 2的假设.运用引理 1或引理 2,也容易得到 $V(T)$ 可由 $[\frac{|T|}{3}]$ 个点控制,矛盾.

引理 **5** 设 P 是不含出端点的 1-路且 $|P|\leqslant 25$.则 $V(P)$ 可由 $[\frac{|T|}{3}]$ 个点控制.

证明 本文仅对 $|P|=25$ 证明,其余情况类似可得.用反证法.假设结论不成立,可推出矛盾.设 $V(P)$ 的导出子图为 H.首先设 $|V(G)|>25$.

取 H 中的拉索使拉索的圈最长.同样从拉索的端点沿拉索的 1条 Hamilton路顺序标记这条路的顶点为 $x_{25},x_{24},\cdots,x_1$.由命题 1,x_1 与 x_{3i}($1\leqslant i\leqslant 8$)不相邻.由于 G 连通,如果 H 有 Hamilton圈,则 H 有 1条含出端点的 Hamilton路,与选取 S 使得 S 的出端点的数目最大矛盾.因此,H 没有 Hamilton圈.因此 x_1 与 x_{25} 不相邻.设拉索的连接点为 v.由于 $d(x_1)\geqslant 5$ 且 x_1 不是出端点,则 $v=x_{3k+1}$ 或 $v=x_{3k+2}$,这里 $2\leqslant k\leqslant 7$.设拉索的圈为 C.在 $k\leqslant 5$ 时,同理可推出,C 中的任一点 x 满足引理 1或引理 2的假设.运用引理 1或引理 2也容易得到 $V(P)$ 可由 $[\frac{|P|}{3}]$ 个点控制,矛盾.因此,设 $k\geqslant 6$.以下分情况讨论.方便起见,记 $C^+=x_1x_2\cdots x_{25}$ 这条路.对于 $1\leqslant i,j\leqslant 25$,记 $x_iC^+x_j$(或 $x_jC^+x_i$)是 C^+ 在 x_i 与 x_j 之间的这一段路(包括 x_i,x_j).

(i)$k=6,v=x_{3k+1}=x_{19}$.因此,x_1 与 $x_{20},x_{21},\cdots,x_{25}$ 不相邻.注意这时 x_{18} 与 x_1 是在圈 C 上的位置是对称的,x_{18} 与 $x_{20},x_{21},\cdots,x_{25}$ 也不相邻.如果 x_1 与 x_7,x_8 都相邻,则 $x_6C^+x_1x_7C^+x_{25}$ 是 H 的 1条 Hamilton路,因此,由假设和拉索的取法,$N(x_6)\subseteq V(C)$.对 $x_5x_6x_7$ 和圈 $x_1x_7C^+x_{19}x_1$ 用命题 2可推出 x_6 至多还与 x_2,x_3,x_4 相邻.对 $x_6C^+x_1x_7C^+x_{25}$ 用命题 1可推出 x_6 与 x_4 不相邻,从而,$d(x_6)\leqslant 4$,矛盾.因此,x_1 与 x_7,x_8 不同时相邻.类似可推出 x_1 与 x_4,x_5 不同时相邻.同理,可得到 x_{18} 与 x_{14},x_{15} 不同时相邻,x_{18} 与 x_{11},x_{12} 不同时相邻.因此,有

(F) x_1 与 x_7,x_8 不同时相邻,x_1 与 x_4,x_5 不同时相邻;x_{18} 与 x_{14},x_{15} 不同时相邻,x_{18} 与 x_{11},x_{12} 不同时相邻.

另外,由于 x_{25} 也不是出端点,x_{25} 只与 P 中的点相邻.由于选取拉索使得拉索的圈最长,x_{25} 与 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 不相邻.对称地,x_{25} 与 $x_{13},x_{14},\cdots,x_{18}$ 不相邻.由命题 1,x_{25} 与 x_{23},x_{20},x_8,x_{11} 也不相邻.这样,x_{25} 还与 $\{x_7,x_9,x_{10},x_{12}\}\cup\{x_{19},x_{21},x_{22}\}$ 中的至少 4点相邻.

如果 x_{25} 与 x_{21},x_{22} 都相邻,则 $x_{24}C^+x_{22}x_{25}x_{21}C^+x_1$ H 的 1条 Hamilton路,因此,$N(x_{24})\subseteq V(P)$.对 $x_{23}x_{24}x_{25}$ 和圈 $x_1C^+x_{19}x_1$ 用命题 2可推出 x_{24} 至多还与 x_{20},x_{21},x_{22} 相邻.对 $x_{24}C^+x_{22}x_{25}x_{21}C^+x_1$ 用命题 1可推出 x_{24} 与 x_{22} 不相邻,从而,$d(x_{24})\leqslant 4$,矛盾.因此,x_{25} 与 x_{21},x_{22} 不同时相邻.

如果 x_{25} 与 x_9 相邻,对于 $x_1C^+x_9x_{25}C^+x_{10}$ 这条 Hamilton路,由于选取拉索使得拉索的圈最长,x_1 与 x_j($10\leqslant j\leqslant 15$)不相邻.再对 $x_1C^+x_9x_{25}C^+x_{10}$ 用命题 1可推出 x_1 与 x_{17} 也不相邻.因此,$N(x_1)-\{x_2,x_{19}\}\subseteq\{x_4,x_5,x_7,x_8,x_{16}\}$.由(F)可知,$x_1$ 与 x_{16} 要相邻.对 $x_{17}x_{18}x_{19}$ 和圈 $x_1C^+x_{16}x_1$ 用命题 2可得到矛盾.因此,x_{25} 与 x_9 不相邻.注意 x_{10} 与 x_9 在圈 C 上的位置是对称的,因此,x_{25} 与 x_{10} 不相邻.

因此,x_{25} 与 x_7,x_{12} 都相邻.对于 $x_1C^+x_7x_{25}C^+x_8$ 和 $x_1C^+x_{12}x_{25}C^+x_{13}$ 这两条 Hamilton路,由于选取拉索使得拉索的圈最长,x_1 与 x_j($8\leqslant j\leqslant 17$)不相邻.因此,x_1 与 x_4,x_5,x_7 都相邻,与(F)矛盾.

(ii)$k=6,v=x_{3k+2}=x_{20}$.因此,x_1 与 $x_{21},\cdots,x_{25}$ 不相邻.这时 x_{19} 与 x_1 在圈 C 上的位置是对称的,x_{19} 与 $x_{21},\cdots,x_{25}$ 也不相邻.由于 x_{25} 不是出端点,x_{25} 只与 P 中的点相邻.由于选取拉索使得拉索的圈最长,x_{25} 与 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 不相邻.对称地,x_{25} 与 $x_{15},x_{16},\cdots,x_{19}$ 不相邻.另外,因为 x_{20},x_{23} 分别控制了 x_1,x_{19},x_{21} 和 x_{22},x_{24},由命题 3,可得到 x_{25} 还与 $\{x_7,x_{10},x_{13},x_{21},x_{22}\}$ 中的至少 4点相邻.

如果 x_{25} 与 x_7,x_{10},x_{13} 都相邻,对于这三条 H 的 Hamilton路: $x_1C^+x_7x_{25}C^+x_8$, $x_1C^+x_{10}x_{25}C^+x_{11}$ 和 $x_1C^+x_{12}x_{25}C^+x_{13}$,由于选取拉索使得拉索的圈最长,$x_1$ 与 x_j($8\leqslant j\leqslant 18$)不相邻.因此,x_1 与 x_4,x_5,x_7,x_{19} 中至少 3个点相邻.如果 x_1 与 x_{19} 相邻,则 $x_2C^+x_{19}x_1x_{20}C^+x_{25}$ 是 H 的一条 Hamilton路,因此,$N(x_2)\subseteq V(P)$.由命题 1,x_2 与 x_4 不相邻.对 $x_1x_2x_3$ 与圈 $x_7C^+x_{25}x_7$ 运用命题 2可得矛盾.否则,x_1 与 x_{19} 不相邻,则 x_1 与 x_4,x_5 都相邻.则 $x_2C^+x_4x_1x_5C^+x_{25}$ 是 H 的 1条 Hamilton路,余下则类似于前一种情况可推出矛盾.

否则,由于 x_{13} 与 x_7 在圈 C 上的位置是对称的,可设 x_{25} 与 x_7,x_{21},x_{22} 都相邻.由于 $x_{23}x_{24}x_{25}x_{22}C^+x_1$

是 H的 1条 Hamilton路,因此,$N(x_{23})\subseteq V(P)$.类似由拉索取法可知,x_{23}与$x_1,x_2,\cdots,x_5$不相邻.因此x_{23}与圈$x_{25}x_{21}\vec{C}x_7x_{25}$的至少1点相邻,对$x_{22}x_{23}x_{24}$和这个圈运用命题2可得到矛盾.

(iii) $k=7,v=x_{3k+1}=x_{22}$.则x_1与x_{21}在圈C上的位置是对称的.由拉索的取法,x_1,x_{21}都与x_{23},x_{24},x_{25}不相邻.由命题1,x_1与$x_{3j}(1\leqslant j\leqslant 7)$不相邻,$x_{21}$与$x_{3j+1}(1\leqslant j\leqslant 7)$不相邻.同(i)的推理还可有.

(G) x_1与x_7,x_8不同时相邻,x_1与x_4,x_5不同时相邻;x_{21}与x_{17},x_{18}不同时相邻,x_{21}与x_{14},x_{15}不同时相邻.

由命题2和(G),容易推出,x_1与x_{13},x_{16},x_{19}都不相邻.对称地,x_{21}与x_3,x_6,x_9也都不相邻.这样,$N(x_1)-\{x_2,x_{22}\}\subseteq\{x_4,x_5,x_7,x_8,x_{10},x_{11}\}\cup\{x_{14},x_{17},x_{20}\}$.

对于x_{25},可类似由拉索的取法,x_{25}都与$x_1,x_2,x_3,x_{19},x_{20},x_{21}$不相邻.再由命题1,可得到$N(x_{25})-\{x_2,x_{24}\}\subseteq\{x_4,x_6,x_7,x_9,x_{10}\}\cup\{x_{18},x_{16},x_{15},x_{13},x_{12}\}\cup\{x_{22}\}$.分4步推出矛盾.

(a)设x_{25}与x_6相邻.这时对于$x_1\vec{C}x_6x_{25}\vec{C}x_7$这条Hamilton路.由命题1可推出$x_1$与$x_{3j-1}(3\leqslant j\leqslant 7)$不相邻,再由拉索的取法可推出$x_1$与$x_7$不相邻,结合前述的结论可知,$x_1$与$x_4,x_5,x_{10}$都相邻,与(F)矛盾.

因此,x_{25}与x_6不相邻.同理也可推出x_{25}与x_9不相邻.由于x_{16}与x_6在圈C上的位置是对称的,由于x_{13}与x_9在圈C上的位置也是对称的,因此,x_{25}与x_{16},x_{13}也不相邻.因此,$N(x_{25})-\{x_2,x_{24}\}\subseteq\{x_4,x_7,x_{10}\}\cup\{x_{18},x_{15},x_{12}\}\cup\{x_{22}\}$.由于$d(x_{25})\geqslant 5$,以及$\{x_4,x_7,x_{10}\}$与$\{x_{18},x_{15},x_{12}\}$在圈$C$上的位置对称性,不妨设$x_{25}$与$x_4,x_7,x_{10}$至少2个点相邻.

(b)设x_{25}与x_4,x_7相邻.则$x_5\vec{C}x_{22}x_1\vec{C}x_4x_{25}\vec{C}x_{23}$是$H$的1条Hamilton路.因此,$N(x_5)\subseteq V(P)$.对$x_4x_5x_6$和圈$x_7\vec{C}x_{25}x_7$用命题2可得到$x_5$至多还与$x_1,x_2,x_3$相邻.注意$x_5\vec{C}x_{25}x_4x_3\vec{C}x_1$是$H$的1条Hamilton路,由拉索的取法,$x_5$与$x_1,x_2,x_3$不相邻,所以$d(x_5)\leqslant 4$,矛盾.

(c)设x_{25}与x_4,x_{10}相邻.同(b)的推理可知,$N(x_5)\subseteq V(P)$且x_5与x_1,x_2,x_3不相邻.对$x_4x_5x_6$和圈$x_{10}\vec{C}x_{25}x_{10}$用命题2可得到$x_5$至多还与$x_7,x_8,x_9$相邻.由命题1,$x_5$与$x_7$不相邻,因而也有$d(x_5)\leqslant 4$,矛盾.

(d)设x_{25}与x_7,x_{10}相邻.$x_8\vec{C}x_{25}x_7x_6\vec{C}x_1$是$H$的1条Hamilton路,因此,$N(x_8)\subseteq V(P)$且$x_8$与$x_1,x_2,x_3$不相邻.与(c)同样的推理可得到$d(x_8)\leqslant 4$,矛盾.

(iv) $k=7,v=x_{3k+2}=x_{23}$.则x_1与x_{22}在圈C上的位置是对称的.由于x_{23}控制了x_1,x_{22},x_{24},由命题3可得x_{25}与$\{x_4,x_7,x_{10},x_{13},x_{16},x_{19}\}$中至少4点相邻.

先设x_{25}与x_4相邻.这时,$x_{24}x_{25}x_4\vec{C}x_{23}x_1\vec{C}x_3$是$H$的Hamilton路.因此,$N(x_{24})\subseteq V(P)$.由命题1,$x_{24}$与$x_{3j+1}(1\leqslant j\leqslant 7)$不相邻.由拉索的取法可得,$x_{24}$与$x_2,x_3$也不相邻.对于$H$的Hamilton路$x_{24}x_{25}x_4\vec{C}x_1x_{23}\vec{C}x_5$,用命题1可得$x_{24}$与$x_{3j}(2\leqslant j\leqslant 7)$以及$x_1$不相邻.由拉索的取法,$x_{24}$与$x_5$也不相邻.因此,$N(x_{24})-\{x_{23},x_{25}\}\subseteq\{x_8,x_{11},x_{14},x_{17},x_{20}\}$.

如果x_{24}与x_{20}相邻,对$x_{21}x_{22}x_{23}$与圈$x_4\vec{C}x_{20}x_{24}x_{25}x_4$运用命题2可得到$x_{22}$至多还与$x_1,x_2,x_3$相邻.但对于$H$的Hamilton路$x_{22}\vec{C}x_4x_{25}\vec{C}x_{23}x_1\vec{C}x_3$时,由拉索的取法,$x_{22}$与$x_2,x_3$不相邻,因而$d(x_{22})\leqslant 4$,矛盾.

如果x_{24}与x_{17}相邻,对$x_{21}x_{22}x_{23}$与圈$x_4\vec{C}x_{17}x_{24}x_{25}x_4$运用命题2可得到$x_{22}$至多还与$x_1,x_2,x_3,x_{18},x_{19},x_{20}$相邻.同前述,$x_{22}$与$x_2,x_3$不相邻.由命题1,$x_{22}$与$x_{20}$不相邻.因此,$x_{22}$与$x_1,x_{18},x_{19}$都相邻.因此,$x_{20}\vec{C}x_{22}x_{19}\vec{C}x_1x_{23}\vec{C}x_{25}$是$H$的Hamilton路.因此,$N(x_{20})\subseteq V(P)$.对$x_{19}x_{20}x_{21}$与圈$x_1Cx_{18}x_{22}x_1$运用命题2,可得到$x_{20}$至多还与$x_{23},x_{24},x_{25}$相邻.由拉索的取法,$x_{20}$与$x_{24},x_{25}$不相邻,因而$d(x_{20})\leqslant 4$,矛盾.

因此x_{24}与x_{14},x_{11},x_8都相邻.这时如x_{25}与x_{13},x_{10},x_7任一点相邻,则H有Hamilton圈.例如x_{25}与x_{13}相邻时,$x_1Cx_{13}x_{25}x_{24}x_{14}\vec{C}x_{23}x_1$是$H$的Hamilton圈.矛盾.否则,$x_{25}$与$x_{13},x_{10},x_7$不相邻,则$d(x_{25})\leqslant 4$,矛盾.

下面设x_{25}与x_4不相邻,对称地,设x_{25}与x_{19}也不相邻.从而x_{25}与x_7,x_{10},x_{13},x_{16}都相邻.这时,对$j=7,10,13,16$,$x_{24}x_{25}x_j\vec{C}x_{23}x_1Cx_{j-1}$和$x_{24}x_{25}x_j\vec{C}x_1x_{23}Cx_{j+1}$都是$H$的Hamilton路.因此,$N(x_{24})\subseteq V(P)$.且拉索的取法和命题1,则$N(x_{24})-\{x_{23},x_{25}\}\subseteq\{x_3,x_{20}\}$,与$d(x_{24})\geqslant 5$矛盾.

以上在$|V(G)|>25$时可推出矛盾.如果$|V(G)|=25$,则$H=G$.如H中没有Hamilton圈,上面的推理同样成立.如H中有Hamilton圈,由于H中的每一点的度至少是5,通过运用命题1~3类似可推出矛盾.这样引理5得证.

由上述结果可推导出定理1的结论.由引理3和

引理 5,如果 $P\in I_2$,则 $|P|\geq 14$,如果 $P\in I_1$,则 $|P|\geq 28$.因此,$\sum_{P\in I_1}|P|\geq 28|I_1|$;以及 $\sum_{P\in I_2}|P|\geq 14|I_2|$.

由引理 4,如果 $T\in E'$,则 $|T'|\geq 19$.因此,如果 $P\in A$ 的 2 个端路 T 都在 E' 中,则 $|P|\geq 41$;如果 $P\in A$ 只有 1 个端路 T 在 E' 中,则 $|P|\geq 23$.因此对每条接受 2-路 P,有 $|P|+|\{$接受点在 P 上的端点$\}|\geq 21|\{P\{$包含的在 E' 的端路$\}|+|\{P$的出端点$\}|$.设 a 是 A 中的路的出端点的总数,b 是 S 中的路的出端点的总数.从而,$\sum_{P\in A}|P|-a+b\geq 21|E'|$.因此,$\sum_{P\in A\cup O_1\cup O_2}|P|\geq 21|E'|$.结合 3 个不等式得到,

$$n\geq\sum_{P\in I_1}|P|+\sum_{P\in I_2}|P|+\sum_{P\in A\cup O_1\cup O_2}|P|\geq 28|I_1|+14|I_2|+21|E'|,$$

即有 $\frac{n}{42}\geq\frac{2}{3}|I_1|+\frac{1}{3}|I_2|+\frac{1}{2}|E'|$.代入(*),得到 $|D|\leq\frac{5}{14}n$.定理 1 证毕.

参考文献

1 Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: W H Freeman, 1979.

2 Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Fundamentals of Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, 1998.

3 McCuaig W, Shepherd B. Domination in graphs with minimum degree two. J Graph Theory, 1989, (13): 749~762.

4 Reed B A. Paths stars and the number three. Combin Probab Comput, 1996, (5): 277~295.

5 Caro Y, Roditty. On the vertex-independence number and star decomposition of graphs. Ars Combin, 1985, (20): 167~180.

6 Caro Y, Roditty. A note On the k-domination number of a graph. Internat J Math Sci, 1990, (13): 205~206.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 164 页 Continue from page 164)

3 Hall P. A characteristic property of soluble groups. J London Math Soc, 1937, 12: 188~200.

4 Arad Z, Ward M B. New criteria for the solvability of finite groups. J Algebra, 1982, 77: 234~246.

5 Ballester-Bolinches A, Guo X. On complemented subgroups of finite groups. J Algebra, 1999, 72: 161~166.

6 郭文彬.群类论.北京:科学出版社,2000.103~104.

7 张远达.幂零与可解之间.武汉:武汉大学出版社,1988.315~316.

8 Wang Y. Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented. J Algebra, 2000, 224: 467~478.

9 Guo W. The Theorey of Classes of Groups. Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. 467~478.

10 Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.

11 徐明耀.有限群导引.北京:科学出版社,1999.

12 Doerk K. Minimal nicht über auflösbare endliche Gruppen. Math Zeit, 1966, 198~205.

13 Asaad M, Ballester-Bolinches A, Pedraza Aguilera M C. A note on minimal subgroups of finite groups. Comm in Algebra, 1996, 24(8): 2771~2776.

14 Li Shirong. On minimal subgroups of finite groups Ⅲ. Communications in Algebra, 1998, 26(8): 2453~2461.

15 Hall P. Complemented group. J London Math Soc, 1937, 12: 201~204.

(责任编辑: 黎贞崇)