DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.003
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 175~176

普朗克函数的拐点光波长方程*

The Light Wavelength Equation of Inflexion in Planck Function

陈广生[1]　卢文全[2]　蔡如华[1]　丁宣浩[1]
Chen Guangsheng[1]　Lu Wenquan[2]　Cai Ruhua[1]　Ding Xuanhao[1]

(1. 桂林电子工业学院计算科学与数学系　桂林市金鸡路　541004;
2. 中国电子科技集团公司第三十四研究所　桂林市金鸡路　541004)

(1. Dept. of Computing Science & Math., Guilin University of Electronic Technology, Jinjilu, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. China Electronic Technology Group Corporation No. 34 Institute, Jinjilu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　基于普朗克公式,导出普朗克函数拐点光波长的普遍方程,并利用牛顿迭代法求出该光波长方程的 2个根,找到普朗克公式中潜在的另外一个普适常数.

关键词　普朗克函数　拐点光波长方程　超越方程　波长差比

中图法分类号　O431.2

Abstract　According to the Planck formula, we have deduced a light wavelength equation of inflexion on Planck function, and solved two roots of the equation by Newton-Raphson method. We also found out another potential general right constant in Planck formula.

Key words　Planck function, the light wavelength equation of inflexion, transcendental equation, ratio of wavelength on difference

近年来,光电子技术的发展,再次引发人们对普朗克公式的研究兴趣.文献[1]找到普朗克函数的一个拐点波长,但是计算结果略有错误.从普朗克函数的曲线来看[2],该函数不仅有峰值点,还应该有两个拐点.文献[2]找到了这两个拐点,并且由这两个拐点提出了一种新的测温方法——拐点测温法.

本文以普朗克函数为依据,用与文献[2]不同的方法导出了拐点光波长的普遍方程式,通过求解该方程和对其结果的深入研究,找到一个普朗克公式中潜在而有应用价值的波长差比常数.

1　普朗克函数拐点光波长方程的导出

普朗克根据他提出的光量子假设,所导出的描述黑体热辐射规律的普朗克函数[3]为

$$e_b(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5}\left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}, \tag{1}$$

式中,常数 $C_1 = 3.7415\times 10^{-4}\,\mathrm{W\cdot\mu m^2}$;$C_2 = 14388\,\mu\mathrm{m\cdot K}$.

令 $$f_1 = \frac{C_1}{\lambda^5}, \tag{2}$$

$$f_2 = \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}, \tag{3}$$

则(1)式变为 $$e_b = g(f_1, f_2) = f_1 f_2. \tag{4}$$

根据微分学中函数拐点是二阶导数为零的原理,由(4)式对 λ 求导

$$\frac{de_b}{d\lambda} = \frac{dg}{d\lambda} = f_1\frac{df_2}{d\lambda} + f_2\frac{df_1}{d\lambda}, \tag{5}$$

由(2),(3)式分别对 λ 求导

$$\frac{df_1}{d\lambda} = -\frac{5C_1}{\lambda^6}, \tag{6}$$

$$\frac{df_2}{d\lambda} = f_2^2 f_3 f_4, \tag{7}$$

其中 $$f_3 = \frac{C_2}{\lambda^2 T}; \tag{8}$$

$$f_4 = e^{\frac{C_2}{\lambda T}}. \tag{9}$$

由(5)式对 λ 求导

$$\frac{d^2 e_b}{d\lambda^2} = \frac{d^2 g}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(f_1\frac{df_2}{d\lambda} + f_2\frac{df_1}{d\lambda}\right) = f_1\frac{d^2 f_2}{d\lambda^2} + 2\frac{df_1}{d\lambda}\cdot\frac{df_2}{d\lambda} + f_2\frac{d^2 f_1}{d\lambda^2}, \tag{10}$$

2004-02-13收稿.
* 国家自然科学资金资助项目(10361003).

由(6)式

$$\frac{d^2 f_1}{d\lambda^2} = \frac{30C_1}{\lambda^7}, \tag{11}$$

由(7)式得

$$\frac{d^2 f_2}{d\lambda^2} = \frac{d f_2^2 f_3 f_4}{d\lambda} = 2 f_2 f_3 f_4 \frac{d f_2}{d\lambda} + f_2^2 f_4 \frac{d f_3}{d\lambda} + f_2^2 f_3 \frac{d f_4}{d\lambda}, \tag{12}$$

式中 $$\frac{d f_3}{d\lambda} = \frac{d\frac{C_2}{\lambda^2 T}}{d\lambda} = -\frac{2C_2}{\lambda^3 T}; \tag{13}$$

$$\frac{d f_4}{d\lambda} = \frac{d e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{d\lambda} = -\frac{C_2}{\lambda^2 T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = -f_3 f_4, \tag{14}$$

把(7)、(13)和(14)式代入(12)式得

$$\frac{d^2 f_2}{d\lambda^2} = 2 f_2^3 f_3^2 f_4^2 - \frac{2C_2}{\lambda^3 T} f_2^2 f_4 - f_2^2 f_3^2 f_4, \tag{15}$$

把(6)、(7)、(11)和(15)式代入(10)式得

$$\frac{d^2 e_\lambda}{d\lambda^2} = 2 f_1 f_2^3 f_3^2 f_4^2 - \frac{2C_2}{\lambda^3 T} f_1 f_2^2 f_4 - f_1 f_2^2 f_3^2 f_4 - 10\frac{C_1}{\lambda^6} f_2^2 f_3 f_4 + \frac{30C_1}{\lambda^7} f_2, \tag{16}$$

令(16)式等于0,即

$$2 f_1 f_2^3 f_3^2 f_4^2 - \frac{2C_2}{\lambda^3 T} f_1 f_2^2 f_4 - f_1 f_2^2 f_3^2 f_4 - 10\frac{C_1}{\lambda^6} f_2^2 f_3 f_4 + \frac{30C_1}{\lambda^7} f_2 = 0, \tag{17}$$

将(17)式两边同时乘以$\frac{\lambda^7}{f_2}$,得到

$$2\lambda^7 f_1 f_2^2 f_3^2 f_4^2 - \frac{2\lambda^4 C_2}{T} f_1 f_2 f_4 - \lambda^7 f_1 f_2 f_3^2 f_4 - 10\lambda C_1 f_2 f_3 f_4 + 30C_1 = 0, \tag{18}$$

把(2)、(3)式和(8)、(9)式的 f_1, f_2, f_3, f_4 代入(18)式,并在(18)式的两边同时除以 C_1 得到

$$\frac{1}{\lambda^5}\left[2\lambda^7 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^{-2} \frac{C_2^2}{\lambda^4 T^2} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - \frac{2\lambda^4 C_2}{T} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - \lambda^7 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} (\frac{C_2}{\lambda^2 T})^2 e^{\frac{C_2}{\lambda T}}\right] - 10\lambda (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} \frac{C_2}{\lambda^2 T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} + 30 = 0, \tag{19}$$

在(19)式的两边同时乘以$(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^2$,简化后得

$$\frac{2C_2^2}{\lambda^2 T^2} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}})^2 - \frac{2C_2}{\lambda T} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1) e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - \frac{C_2^2}{\lambda^2 T^2} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1) e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 10\frac{C_2}{\lambda T} (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1) e^{\frac{C_2}{\lambda T}} + 30 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)^2 = 0, \tag{20}$$

令 $$x = \frac{C_2}{\lambda T}, \tag{21}$$

则(20)式变成

$$2x^2 e^{2x} - 2x e^{2x} + 2x e^x - x^2 e^{2x} + x^2 e^x - 10x e^{2x} + 10x e^x + 30(e^{2x} - 2e^x + 1) = 0, \tag{22}$$

整理(22)式得到以下拐点光波长的普遍方程

$$(x^2 - 12x + 30) e^{2x} + (x^2 + 12x - 60) e^x + 30 = 0. \tag{23}$$

这是一个较为复杂的初等超越方程.

2 拐点光波长方程的解及其应用

方程(23)式应该有2个根,这里把它们记为 x_{si} 和 $x_{li} < x_{si}$,用牛顿迭代法求出(23)式这一超越方程的根,得到其结果分别是 $x_{si} = 8.4445392051$,$x_{li} = 3.524171914$,令 λ_{li} 代表普朗克函数长波边的拐点波长,根据前面关于 x 的定义式(21),将 x_{li} 代入即得

$$\lambda_{li} = \frac{C_2}{x_{li} T}, \tag{24}$$

相应有短波边的拐点波长 λ_{si} 为

$$\lambda_{si} = \frac{C_2}{x_{si} T}. \tag{25}$$

为了探讨 λ_{si} 和 λ_{li} 的应用价值,特引出维恩位移定律[3]

$$\lambda_m T = 2879.8 \mu m \cdot K. \tag{26}$$

本文求出(26)式更精确的结果是

$$\lambda_m T = 2897.818526 \mu m \cdot K, \tag{27}$$

把 $C_2 = 1.4388 \times 10^4 \mu m \cdot K$ 和 x_{li} 及 x_{si} 之值代入(24)及(25)式得到

$$\lambda_{li} T = 4082.661218 \mu m \cdot K, \tag{28}$$

$$\lambda_{si} T = 1703.822986 \mu m \cdot K. \tag{29}$$

本文定义一个波长差比参数 U为

$$U = \frac{\lambda_m - \lambda_{si}}{|\lambda_m - \lambda_{li}|}, \tag{30}$$

把(27)~(29)式代入(30)式得到1个普朗克公式中潜含的普适常数 $U = 1.007725$.

3 结束语

首先,本文从解拐点光波长普遍方程得到的结果,与文献[2]是一致的.表明拐点波长表达式(27)和(28)式已准确无误.

其次,波长差比参数 U的应用价值在于:波长测温法[2]必然涉及波长测量.所测出的波长是否可以用于计算温度,这需要有一个判据,可以用 U的值来作为这个判据.显然这是很有应用价值的.(30)式定义的波长差比参数 U还可能有更深刻的意义和应用价值,这有待进一步探讨.

参考文献

1 俞伦鹏,彭瑞欣.辐射测温仪工作波长的选择方法.宇航计测技术,1998,18(2):37~40.

2 蔡如华,卢文全,丁宣浩.热辐射波长测温法的理论研究.宇航计测技术,2003,23(4),19~23.

3 李景镇.光学手册.西安:陕西科学出版社,1986.

(责任编辑:黎贞崇)