DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (3): 177～178, 182

# 分数 $(g,f)$-2-覆盖图和分数 $(g,f)$-2-消去图
# On Fractional $(g,f)$-2-Covered Graphs and Fractional $(g,f)$-2-Deleted Graphs

周思中
Zhou Sizhong

(江苏科技大学数理系　江苏镇江　212003)
(Dept. of Math.& Phys., Jiangsu Sci.& Tech. Univ., Zhenjiang, Jiangsu, 212003, China)

摘要　分别给出分数 $(g,f)$-2-覆盖图和分数 $(g,f)$-2-消去图的概念，以及一个图是分数 $(g,f)$-2-覆盖图和分数 $(g,f)$-2-消去图的若干充分条件.

关键词　图　分数 $(g,f)$-2-覆盖图　分数 $(g,f)$-2-消去图　分数 $(g,f)$-因子
中图法分类号　O157.5

**Abstract**　In this paper, the fractional $(g,f)$-2-covered graph and the fractional $(g,f)$-2-deleted graph are defined, and some sufficient conditions for a graph to be fractional $(g,f)$-2-covered and fractional $(g,f)$-2-deleted are given.

**Key words**　graph, fractional $(g,f)$-2-covered graph, fractional $(g,f)$-2-deleted graph, fractional $(g,f)$-factor

文献[1,2]给出一个图有分数 $k$-因子的充分必要条件，文献[3]引入分数 $(g,f)$-覆盖图和分数 $(g,f)$-消去图的概念，并分别给出一个图是分数 $(g,f)$-覆盖图和分数 $(g,f)$-消去图的一个充分必要条件. 文献[4～6]分别给出一个图是分数 $(g,f)$-覆盖图和分数 $(g,f)$-消去图的若干充分条件. 本文推广分数 $(g,f)$-覆盖图和分数 $(g,f)$-消去图的概念，给出分数 $(g,f)$-2-覆盖图和分数 $(g,f)$-2-消去图的定义，并给出一个图是分数 $(g,f)$-2-覆盖图和分数 $(g,f)$-2-消去图的若干充分条件. 特别说明，本文所考虑的图均为有限无向图，可以有重边但没有环.

## 1　引理

设 $G$ 是一个图，对 $V(G)$ 的子集 $S$，用 $G-S$ 表示从 $G$ 中删去顶点集合 $S$ 及其关联的边所得的子图. 对 $S\subseteq V(G)$，$G[S]$ 表示由 $S$ 导出的 $G$ 的子图，且 $G-S=G[V(G)\setminus S]$. 对 $E\subseteq E(G)$，$G[E]$ 表示由 $E$ 导出的 $G$ 的子图，且 $G-E=G[E(G)\setminus E]$. 对 $S\subseteq V(G)$，若 $G[S]$ 中没有边，则称 $S$ 是独立集. 设 $S$ 和 $T$ 是 $V(G)$ 的不交子集，记 $E(S,T)=\{xy: xy\in E(G), x\in S, y\in T\}$. 设 $f(x)$ 是任意函数，为方便记，$f(S)=\sum_{x\in S}f(x)$，并令 $f(\emptyset)=0$.

Anstee 在文献[7]中给出了一个图有分数 $(g,f)$-因子的一个充分必要条件，刘桂真、张兰菊在文献[8]中又给出了该条件的一个简单证明.

引理 1[7,8]　设 $G$ 是一个图，则 $G$ 有一个分数 $(g,f)$-因子当且仅当对任意的 $S\subseteq V(G)$ 有 $g(T)-d_{G-S}(T)\leq f(S)$，其中 $T=\{x: x\in V(G)\setminus S, d_{G-S}(x)\leq g(x)\}$.

记 $W_G(S,T)=d_{G-S}(T)-g(T)+f(S)$，则引理 1 可描述为：

引理 2[5]　设 $G$ 是一个图，则 $G$ 有一个分数 $(g,f)$-因子当且仅当对任意的 $S\subseteq V(G)$ 有 $W_G(S,T)\geqslant 0$，其中 $T=\{x: x\in V(G)\setminus S, d_{G-S}(x)\leq g(x)\}$.

刘桂真，张兰菊在文献[9]中得到下面结果：

引理 3[9]　设 $G$ 是一个图，$g$ 和 $f$ 是定义在 $V(G)$ 上的 2 个整数值函数且 $g\leq f$. 若对任意的 $x,y\in V(G)$ 且 $x\neq y$，有 $f(x)d_G(y)\geq d_G(x)g(y)$，则图 $G$ 有分数 $(g,f)$-因子.

## 2　主要结果

定理 1　设 $G$ 是一个图，$g$ 和 $f$ 是定义在 $V(G)$ 上的 2 个整数值函数，且 $g(x)\leq f(x)\leq d_G(x)$. 若对任

2004-01-05收稿，2004-05-13修回。

意的 $x,y\in V(G)$ 且 $x\neq y$,有 $(f(x)-2)d_G(y)\geq(d_G(x)-2)g(y)$,则图 $G$是分数 $(g,f)$-2-覆盖图.

证明 设 $e_i=u_iv_i,i=1,2$为图 $G$的任何两条边.显然,$G$是分数 $(g,f)$-2-覆盖图当且仅当 $G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$.令 $G'=G-e_1-e_2$,下面分 2种情形讨论.

情形Ⅰ $e_1$和 $e_2$相邻,设相邻顶点为 $u=u_1=u_2$.此时,定义 $V(G)$上的 2个整数值函数 $g'(x)$和 $g'(x)$如下:

$$g'(x)=\begin{cases} g(x)-2, x=u(u_1\text{或}u_2),\\ g(x)-1, x=v_1,v_2,\\ g(x), \quad \text{其它}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} f(x)-2, x=u(u_1\text{或}u_2),\\ f(x)-1, x=v_1,v_2,\\ f(x), \quad \text{其它}\end{cases}$$

显然,$G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$当且仅当 $G'$有一个分数 $(g',f')$-因子.根据引理 3知,只需证明对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有

$$f'(x)d_{G'}(y)\geq d_{G'}(x)g'(y) \qquad (1)$$

即可.

(Ⅰ) $x=u,y\in\{v_1,v_2\}$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=(f(x)-2)(d_G(y)-1)=(f(x)-2)d_G(y)-f(x)+2\geq(d_G(x)-2)g(y)-f(x)+2=(d_G(x)-2)(g'(y)+1)-f(x)+2=d_{G'}(x)g'(y)+d_G(x)-2-f(x)+2\geq d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅱ) $x=u,y\notin\{v_1,v_2\}$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=(f(x)-2)d_G(y)\geq(d_G(x)-2)g(y)=d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅲ) $x\in\{v_1,v_2\},y=u$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=(f(x)-1)(d_G(y)-2)=(f(x)-2)d_G(y)-2(f(x)-2)+d_G(y)-2\geq(d_G(x)-2)g(y)+d_G(y)-2f(x)+2=(d_G(x)-2)(g'(y)+2)+d_G(y)-2f(x)+2=(d_G(x)-2)g'(y)+2d_G(x)-4+d_G(y)-2f(x)+2=d_{G'}(x)g'(y)-g'(y)+2d_G(x)-2f(x)+d_G(y)-2=d_{G'}(x)g'(y)+2(d_G(x)-f(x))+d_G(y)-g(y)\geq d_{G'}(x)g'(y)$

(Ⅳ) $x\in\{v_1,v_2\},y\notin\{u,v_1,v_2\}$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=(f(x)-1)d_G(y)=(f(x)-2)d_G(y)+d_G(y)\geq(d_G(x)-2)g(y)+d_G(y)=d_{G'}(x)g'(y)+d_G(y)-g(y)\geq d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅴ) $x=v_1,y=v_2$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=(f(x)-1)(d_G(y)-1)=(f(x)-2)d_G(y)-(f(x)-2)+d_G(y)-1\geq(d_G(x)-2)g(y)+d_G(y)-f(x)+1=(d_G(x)-2)(g'(y)+1)+d_G(y)-f(x)+1=(d_G(x)-2)g'(y)+d_G(x)-2+d_G(y)-f(x)+1=d_{G'}(x)g'(y)-g'(y)+d_G(x)-f(x)+d_G(y)-1\geq d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅵ) $x\notin\{u,v_1,v_2\},y=u$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=f(x)(d_G(y)-2)=(f(x)-2)d_G(y)+2d_G(y)-2f(x)\geq(d_G(x)-2)g(y)+2d_G(y)-2f(x)=d_{G'}(x)g'(y)+2d_G(x)-2f(x)+2d_G(y)-2g(y)\geq d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅶ) $x\notin\{u,v_1,v_2\},y\in\{v_1,v_2\}$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=f(x)(d_G(y)-1)=(f(x)-2)d_G(y)+2d_G(y)-f(x)\geq(d_G(x)-2)g(y)+2d_G(y)-f(x)=d_{G'}(x)g'(y)+d_G(x)-f(x)+2d_G(y)-2g(y)\geq d_{G'}(x)g'(y)$;

(Ⅷ) $x\notin\{u,v_1,v_2\},y\notin\{u,v_1,v_2\}$,则

$f'(x)d_{G'}(y)=f(x)d_G(y)=(f(x)-2)d_G(y)+2d_G(y)\geq(d_G(x)-2)g(y)+2d_G(y)=d_{G'}(x)g'(y)+2d_G(y)-2g(y)\geq d_{G'}(x)g'(y)$.

本文证明了对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有 (1)式成立.由引理 3知,$G'$有一个分数 $(g',f')$-因子.于是,$G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$.

情形Ⅱ $e_1$和 $e_2$不相邻.此时,定义 $V(G)$上的 2个整数值函数 $g'(x)$和 $f'(x)$如下:

$$g'(x)=\begin{cases} g(x)-1, x=u_1,u_2,v_1,v_2,\\ g(x), \quad \text{其它}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} f(x)-1, x=u_1,u_2,v_1,v_2,\\ f(x), \quad \text{其它}\end{cases}$$

显然,$G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$当且仅当 $G'$有一个分数 $(g',f')$-因子.根据引理 3知,只需证明对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有

$$f'(x)d_{G'}(y)\geq d_{G'}(x)g'(y) \qquad (2)$$

即可.

类似于情形Ⅰ 的讨论,可证得对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有 (2)式成立.由引理 3知,$G'$有一个分数 $(g',f')$-因子.于是,$G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$.

综上所述,在所有的情形下,本文证明 $G$有一个分数 $(g,f)$-因子 $F=G_h$含 $e_1$和 $e_2$,并且满足 $h(e_1)=1$和 $h(e_2)=1$.于是,$G$是分数 $(g,f)$-2-覆盖图.

(下转第 182页 Continue on page 182)

3 Zeng Guangzhao, Chen Lansun, Chen Jufang. Persistence and periodic orbits for two-species nonautonomous diffusion Lotka-Volterra models. Math Comput Modelling, 1994, 20(12): 69~80.

4 Zhang Jingru, Chen Lansun, Chen Xiudong. Persistence and globility for two-species nonautonomous competition Lotka-Volterra patch-system with time delay. Nonl Anal, 1999, 37(8): 1019~1028.

5 滕志东,陈兰荪.高维时滞周期的 Kolmogorov型系统的正周期解.应用数学学报, 1999, 22(3): 446~456.

6 Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 178页 Continue from page 178)

证毕.

**定理 2** 设 $G$是一个图, $g$和 $f$是定义在 $V(G)$上的 2个整数值函数,且对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有 $f(x)(d_G(y)-2)\geq d_G(x)g(y)$,则图 $G$是分数 $(g,f)$-2-消去图.

证明 设 $e_i=u_iv_i$, $i=1,2$为图 $G$的任何两条边,令 $G'=G-e_1-e_2$,显然对任意的 $x\in V(G)$,有 $d_G(x)\geq d_{G'}(x)\geq d_G(x)-2$.要证明定理成立,只需证明 $G'$有一个分数 $(g,f)$-因子.由引理 3知,只要证明对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有

$$f(x)d_{G'}(y)\geq d_{G'}(x)g(y) \tag{3}$$

即可.

对任意的 $x,y\in V(G)$且 $x\neq y$,有:

$$f(x)d_{G'}(y)\geq f(x)(d_G(y)-2)\geq d_G(x)g(y)\geq d_{G'}(x)g(y).$$

所以(3)式成立,由引理 3知, $G'$有一个分数 $(g,f)$-因子.于是,图 $G$是分数 $(g,f)$-2-消去图.

证毕.

## 参考文献

1 Schirerman Edward, Ullman D H. Fractional Graph Theory. New York: John Wiley and Sons, 1997.

2 Zhang Lanju, Liu Guizhen. Fractional $k$-factors of graphs. J Sys Sci and Math Scis, 2001, 21(1): 88~92.

3 Yang Jingbo. Fractional $(g,f)$-covered graph and fractional $(g,f)$-deleted graph. Proceedings of the Sixth National Conference of Operation Research Society of China, 2000. 451~454.

4 Yang Jingbo, Ma Yinghong, Liu Guizhen. Fractional $(g,f)$-factors in Graphs. Appl Math J Chinese Univ, 2001, 16A(4): 385~390.

5 Li Zhengping, Yan Guiying, Zhang Xiangsun. On fractional $(g,f)$-covered graphs. OR Transactions, 2002, 6(4): 65~68.

6 Li Zhengping, Yan Guiying, Zhang Xiangsun. On fractional $(g,f)$-deleted graphs. Mathematica Applicata, 2003, 16(1): 148~154.

7 Anstee R R. An algorithmic proof Tutte's $f$-Factor Theorem. J Algorithms, 1985, 6 112~131.

8 Liu Guizhen, Zhang Lanju. Fractional $(g,f)$-factor of graphs. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21B(4): 541~545.

9 Liu Guizhen, Zhang Lanju. Maximum fractional $(0,f)$-factors of graphs. Math Appl, 2000, 13(1): 31~35.

(责任编辑:黎贞崇)