DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 281283

极大子群的 *CI*-截与群的可解性研究 *

The Study on *CI*-section of Maximal Subgroup and the Solvability of Groups

唐曾林　　李世荣
Tang Zenglin　Li Shirong

(广西大学数学与信息科学系　南宁市大学路 100 号　530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　采用新的思想方法,应用 *CI*-截的概念,得到群 G 正规子群 H 为可解、p-可解及 π-可解的若干判定定理,并推广了文献[2]的相关结果.

关键词　极大子群　*CI*-截　可解群　π-可解群
中图法分类号　O152.1

Abstract　Using the new method and the conception of *CI*-section, we obtain some new theorems about the solvable, p-solvable and π-solvable of a normal subgroup H of a finite group G. At the same time, some relative previously known results of references [2] are extended.

Key words　maximal subgroup, *CI*-section, solvable, π-solvable

1959 年,Deskins 在文献[1]中提出群 G 的极大子群 M 的正规指数 $\eta(G:M)$ 的概念,并证明:群 G 可解当且仅当它的每个极大子群 M,恒有 $\eta(G:M)=|G:M|$. 近几年正规指数得到较为系统的研究,李世荣,王燕鸣在文献[2]中定义了与正规指数密切相关的 *CI*-截的概念,由此得到一系列关于可解和 π-可解群的新刻划. 续文献[2]之后,钟祥贵在文献[3]中得出:若对群 G 之每个极大子群 M, $\mathrm{Sec}(M)$ 超可解,其 Sylow 2-子群为交换群,则 G 可解. 本文采用新的思想方法,继续文献[2]的工作,利用群 G 的满足一定约束条件的极大子群 M 的 *CI*-截,得到了群 G 之正规子群 H 为可解、p-可解及 π-可解的若干判定定理,推广了文献[2]的相关结果.

文中 G 总表示一个有限群,未加说明的符号均是标准的,$\overline{G}$ 表示商群 G/N,其中 N 是 G 的正规子群,$M<\cdot G$ 表示 M 是群 G 的极大子群,π 表示某些素数集合,p 总表示一个素数.

1　预备知识及引理

文中 $J(P)$ 表示子群 P 的 Tompson 子群,其中 P 是一个素数幂阶群. 令 $A(P)$ 为 P 的具有极大阶的交换子群之集合,定义: $J(P)=\langle A \mid A\in A(P)\rangle$.

定义 1.1[2]　给定群 G 及 G 的极大子群 M,令 N/K 是 G 的一个主因子,$K\leqslant M$ 而 $N\not\subseteq M$. 称 $M\cap N/K$ 为 M 的一个 *CI*-截,记作 $\mathrm{Sec}(M)$.

引理 1.1[2]　对于群 G 的任意极大子群 M,在同构意义下 M 在 G 中有唯一的 *CI*-截.

引理 1.2[2]　令 $N\leqslant M<G$, $N\trianglelefteq G$ 那么 M/N 与 M 的 *CI*-截同构.

引理 1.3[4]　设 G 为有限群,p 为奇素数,$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$,若 $N_G(Z(J(P)))$ 有正规 p-补,则 G 有正规 p-补.

引理 1.4[5]　群 G 是 2-闭的当且仅当对于 G 的每个奇数阶 Sylow 子群 P, $N_G(Z(J(P)))$ 是 2-闭的.

引理 1.5[6]　令 p 是群 G 的最大素因子,$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$,那么或者 P 正规于 G 或者包含 $N_G(P)$ 的极大子群有合数指数.

引理 1.6[6]　若群 G 中存在 π-可解正规子群 N,使 G/N 亦 π-可解,则 G 必为 π-可解.

引理 1.3 和引理 1.4 给出 Tompson 子群的与本文相关的重要性质.

2　主要结果及证明

定义以下集合:

$\mathscr{F}(G)=\{M \mid M<\cdot G\}$ 为 G 的所有极大子群的集合.

2004-05-08 收稿,2004-07-09 修回。
*国家自然科学基金(10161001)及广西自然科学基金(0249001)资助项目。

$\mathscr{F}_{pc}(G)=\{M \mid M\in\mathscr{F}(G),\ |G:M|_p=1$ 且 $|G:M|$ 是合数$\}$.

$\mathscr{F}^{pc}(G)=\{M \mid M\in\mathscr{F}(G),\ |G:M|$ 是合数，且 M 包含 G 的一个 Sylow p- 子群的正规化子$\}$.

$\mathscr{M}_H(G)=\{M<\cdot G \mid H\not\leq M\}$，其中 H 是群 G 中一个给定的正规子群.

定理 2.1 令 G 是群，若对 G 的每个极大子群 $M\in\mathscr{F}_{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$，$M$ 的 CI- 截 Sec(M) 幂零，则 H 可解，其中 p 是 $|G|$ 的最大素因子.

证明　假若命题不真，设 (G,H) 是极小阶反例，故可以假设 $H>1$ 且 H 非可解. 设 N 是含于 H 的 G 的极小正规子群. 首先证明：$(G/N,H/N)$ 满足定理假设，并由此得 H/N 可解. 若 $\mathscr{F}_{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})=\varnothing$，则 $(G/N,H/N)$ 自动满足定理假设，由 (G,H) 的极小性知 $\overline{H}$ 可解. 故设 $\mathscr{F}_{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})\neq\varnothing$，任取 $\overline{M}\in\mathscr{F}_{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})$，根据定义可知 $|\overline{G}:\overline{H}|_p=1$ 且 $|\overline{G}:\overline{H}|$ 是合数，$\overline{H}\not\leq\overline{M}$. 又因为 $|G:M|=|\overline{G}:\overline{H}|$，所以 $|G:M|_p=1$ 且 $|G:M|$ 是合数，并且 $H\not\leq M$，因此 $M\in\mathscr{F}_{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$. 由定理假设，Sec$(M)$ 幂零，根据引理 1.2，Sec$(\overline{M})$ 也幂零，于是 $(G/N,H/N)$ 满足定理假设. 由于 (G,H) 是极小阶反例，H/N 为可解.

其次，假设 N 非可解. 我们能断言：N 是 G 的唯一极小正规子群. 这是因为，若 N_1,N_2 是 G 的 2 个不同的极小正规子群，由前面的证明知 H/N_1、H/N_2 都可解，又 $H/(N_2\cap N_1)$ 同构于 $H/N_1\times H/N_2$ 的一个子群，可知 $H/(N_2\cap N_1)$ 可解，然而 $N_2\cap N_1=1$，得 H 可解，矛盾于 (G,H) 为极小反例. 由假设 N 非可解，故 N 不可能是素数幂阶群. 设 q 是 $|N|$ 的最大素因子，那么 $q>2$. 令 $Q\in$ Sylq(N)，则 Q 不正规于 N，因为若 $Q\trianglelefteq N$，得 Q char $N\trianglelefteq G$，有 $Q\trianglelefteq G$，与 N 是 G 的非可解极小正规子群的假设矛盾. 现在，由 Frattini 论断：$G=N_G(Q)\cdot N=N_G(Z(J(Q)))\cdot N$，并且 $N_G(Z(J(Q)))<G$. 于是存在 G 的极大子群 M 使 $N_G(Z(J(Q)))\leqslant M$，$G=M\cdot N$，$N\not\leq M$，当然有 $H\not\leq M$，这样就有 $M\in\mathscr{M}_H(G)$. 现在来证明 $|G:M|_p=1$.

首先 $|G:M|_p=|MN:N|_p=|N:M\cap N|_p$，因为 p 是 $|G|$ 的最大素因子，q 是 $|N|$ 的最大素因子，故 $p\geqslant q$. 若 $p=q$，由 $Q\leqslant N_G(Q)\leqslant N_G(Z(J(Q)))\leqslant M$，$Q<N$ 得 $Q\leqslant M\cap N$，故 $|N:M\cap N|_p=|N:M\cap N|_q=1$；若 $p>q$，更有 $|N:M\cap N|_p=1$，于是总有 $|G:M|_p=1$ 成立. 接下来证明 $|G:M|$ 为合数.

因为 $N_N(Z(J(Q)))=N_G(Z(J(Q)))\cap N\leqslant M\cap N<N$，于是存在 N 的极大子群 N_1 满足：$N_N(Q)\leqslant N_G(Z(J(Q)))\leqslant M\cap N\leqslant N_1<\cdot N$，由引理 1.5 可知：$|N:N_1|$ 是合数，又因为 $|G:M|=|MN:N|=|N:M\cap N|=|N:N_1|\cdot|N_1:M\cap N|$，故 $|G:M|$ 是合数. 根据定义，$M\in\mathscr{F}_{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$. 由 N 的唯一性，得 Core$_G(M)=1$. 这是因为，若 Core$_G(M)\neq 1$，则 G 有非平凡正规子群 Core$_G(M)$，由 N 的唯一性，有 $N\leqslant$ Core$_G(M)\leqslant M$，这是一个矛盾. 于是由定义 1.1，$M\cap N$ 是 M 的一个 CI- 截，根据定理假设，Sec(M) 幂零，再由引理 1.1 知：$M\cap N$ 幂零. 而 $N_N(Z(J(Q)))\leqslant M\cap N$，故 $N_N(Z(J(Q)))$ 幂零，特别 $N_N(Z(J(Q)))$ 为 q- 幂零，注意到 $q>2$，由引理 1.3，N 亦 q- 幂零，这与 N 是 G 的非可解极小正规子群矛盾. 因此 N 必须可解，又前面证得 H/N 可解，得出 H 可解，矛盾于 (G,H) 是极小阶反例的假设. 定理证毕.

推论 2.1[2]　有限群 G 可解的充分必要条件是，对任意 $M\in\mathscr{F}_{pc}(G)$，M 的 CI- 截 Sec(M) 为幂零. 这里 p 是 $|G|$ 的最大素因子.

证明　在定理 2.1 中令 $H=G$，这时 $\mathscr{M}_H(G)=\mathscr{F}(G)$，于是 $\mathscr{F}_{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)=\mathscr{F}_{pc}(G)\cap\mathscr{F}(G)=\mathscr{F}_{pc}(G)$，即得结论.

定理 2.2　设 G 是群，若对任意 $M\in\mathscr{F}^{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$，$M$ 的 CI- 截 Sec(M) 为 p- 幂零群，则 H 必 p- 可解，其中 p 是 $|G|$ 的最大素因子.

证明　假若命题不真，设 (G,H) 是极小阶反例，故可以假设 $H>1$ 且 H 非可解. 设 N 是含于 H 的 G 之极小正规子群.

首先验证 $(G/N,H/N)$ 满足定理条件，并由此得 H/N p- 可解.

若 $\mathscr{F}^{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})=\varnothing$，则 $(G/N,H/N)$ 自动满足定理假设，由 (G,H) 的极小性知 H/N 为 p- 可解. 于是假设 $\mathscr{F}^{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})\neq\varnothing$. 取 $\overline{M}\in\mathscr{F}^{pc}(\overline{G})\cap\mathscr{M}_H(\overline{G})$，现在来证明 $M\in\mathscr{F}^{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$. 首先，由 $\mathscr{F}^{pc}(G)$ 的定义知 $|\overline{G}:\overline{M}|$ 是合数，因为 $|G:M|=|\overline{G}:\overline{M}|$，所以 $|G:M|$ 是合数，又 $\overline{M}$ 中包含 G 的某个西洛 p- 子群的正规化子，即存在 $P\in$ Sylp$(\overline{G}$，满足 $N_G(P)\leqslant\overline{M}$，因为 $N_G(P)\cdot N/N\leqslant N_G(P)\leqslant\overline{M}=M/N$，故 $N_G(P)\leqslant M$. 其次由 $\overline{M}\in\mathscr{M}_H(\overline{G})$，得 $H\not\leq M$，这样一来 $M\in\mathscr{F}^{pc}(G)\cap\mathscr{M}_H(G)$，根据定理假设 Sec$(M)$ 为 p- 幂零，由引理 1.2 得 Sec$(\overline{M})$ 亦 p- 幂零，于是 $(G/N,H/N)$ 满足定理的假设，又 (G,H) 是极小阶反例，必有 H/N 为 p- 可解.

假设 N 非 p- 可解. 我们能断言 N 是 G 的唯一极小正规子群，同时 N 不是 p'- 群，即 $|N|$ 中含有素因子 p，因为 p 是 $|G|$ 的最大素因子，所以 p 是 N 的最大素因子. 令 $P\in$ Sylp(G)，由 $N\triangleleft G$，知 $P\cap N$ 是 N 的 Sylow p- 子群，令 $T=P\cap N$，由 Franttini 论断：G

$= N_G(T)\circ N$, 同定理2.1的证明类似, T不正规于N, 又因为 $N_G(T)\leqslant N_G(Z(J(T)))$, 所以 $G = N_G(Z(J(T)))\circ N$, 并且$N_G(Z(J(T)))< G$, 故存在G的极大子群M_1满足$N_G(Z(J(T)))\leqslant M_1$, 从而 $G = M_1\circ N$, $N\not\trianglelefteq M_1$, 特别 $H\not\trianglelefteq M_1$, 因此 $M_1\in \mathscr{M}_H(G)$, 又对任意 $x\in N_G(P)$, $(P\cap N)^x = P^x\cap N^x = P\cap N$, 所以 $x\in N_G(P\cap N) = N_G(T)$, 由 x 的任意性有 $N_G(P)\leqslant N_G(T)\leqslant N_G(Z(J(T)))\leqslant M_1$, 于是 P 不正规于G. 由引理 1.5 可知, $|G:M_1|$ 有合数指数, 因此 $M_1\in \mathscr{F}^{pc}(G)\cap \mathscr{M}_H(G)$, 由定理假设 $\mathrm{Sec}(M_1)$ 为 p-幂零群. 又由 N 的唯一性, $\mathrm{Core}_G(M_1) = 1$, 于是 $M_1\cap N$ 是M_1的一个CI-截, 由条件, $M_1\cap N$为p-幂零, 又根据 $N_N(Z(J(T)))\leqslant M_1\cap N$ 知: $N_N(Z(J(P)))$为p-幂零, 注意到$p> 2$, 再应用引理1.3, N亦为p-幂零, 故N为p-可解, 由前面证得H/N为p-可解, 利用引理1.6得H为p-可解, 矛盾于(G, H)是极小阶反例的假设. 证毕.

类似于推论 2.1, 有

推论 2.2[2] 有限群G可解的充分必要条件是, 对任意 $M\in \mathscr{F}^{pc}(G)$, M的CI-截$\mathrm{Sec}(M)$是 p-幂零群. 这里, p 是 $|G|$的最大素因子.

定理 2.3 设 G是群, 若对任意 $M\in \mathscr{M}_H(G)$, 当M非幂零时, M的CI-截$\mathrm{Sec}(M)$为π'-群, 则H为π-可解.

证明 假若命题不真, 设(G, H)是极小阶反例, 故可以假设$H> 1$且H非可解. 设N是含于H的G之极小正规子群.

首先验证$(G/N, H/N)$满足定理条件, 并由此得$H/N\ \pi$-可解.

若 $\mathscr{M}_H(\bar{G}) = \varnothing$, 则$(G/N, H/N)$自动满足定理假设, 由$(G, H)$的极小性知 H/N 为π-可解, 故假设$\mathscr{M}_H(\bar{G})\neq \varnothing$. 取$\bar{M}\in \mathscr{M}_H(\bar{G})$, 且$\bar{M}$非幂零. 因为$\bar{H}\not\trianglelefteq\bar{M}$, 所以 $H\not\trianglelefteq M$, 从而 $M\in \mathscr{M}_H(G)$, 又 $\bar{M}$ 非幂零, 故M非幂零. 由定理假设, M的CI-截$\mathrm{Sec}(M)$为π'-群, 由引理 1.2, $\bar{M}$ 的CI-截也为π'-群, 于是$(G/N, H/N)$满足定理中的假设, 由(G, H)是极小阶反例知H/N 为π-可解. 现证明 N 也为π-可解.

反证, 若N非π-可解, 同定理2.1的证明类似, N是G的唯一极小正规子群, 同时 N不是π'-群. 令$\pi_1 = \{p \mid p\in \pi$ 并且$p \mid |N|\}$, 显然π_1非空. 对任意 $p\in \pi_1$ 设$P\in \mathrm{Syl}_p(N)$, 则P不正规于N, 更有P不正规于 G, 由 Franttini 论断 $G = N_G(P)\circ N = N_G(Z(J(P)))\circ N$并且$N_G(Z(J(P)))< G$, 于是存在$G$的极大子群$M$, 使 $N_G(Z(J(P)))\leqslant M$, 从而 $G = M\circ N$, $N\not\trianglelefteq M$, 故$H\not\trianglelefteq M$, 于是$M\in \mathscr{M}_H(G)$. 现证明 M 是幂零的. 若 M 非幂零, 首先, 由 N 的唯一性, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, 由定义$M\cap N$是M的一个CI-截, 由定理假设可知 $M\cap N$ 是π'-群, 又 $P\leqslant N_N(P)\leqslant N_N(Z(J(P))) = N_G(Z(J(P)))\cap N\leqslant M\cap N$, 故$P\leqslant M\cap N$, 但$P(> 1)$是$\pi$-子群不可能包含在$\pi'$-群$M\cap N$中, 导致矛盾. 现在, M为幂零群, 因为$N_N(Z(J(P))) = N_G(Z(J(P)))\cap N\leqslant M\cap N< M$, 所以$N_N(Z(J(P)))$亦幂零, 当然$p$-幂零, 这时$p$必等于2. 这是因为若$p\neq 2$, 即$p$是奇素数, 根据引理1.3, N为p-幂零, 但是 N 是G的非可解极小正规子群, 不可能是 p-幂零的, 得出矛盾. 由 p 的任意性可知, $\pi_1 = \{2\}$, 令 q 是 $|N|$的任一奇素因子, 设$Q\in \mathrm{Syl}_q(N)$. 易证 Q不正规于N, 由 Franttini 论断, $G = N_G(Q)\circ N = N_G(Z(J(Q)))\circ N$并且$N_G(Z(J(Q)))< G$, 故有 G 的极大子群M_1, 使 $N_G(Z(J(P)))\leqslant M_1$, 于是 $G = M_1\circ N$, 并且必有 M_1 非幂零. 这是因为, 若 M_1 幂零, 根据 $N_N(Z(J(Q)))\leqslant N_G(Z(J(Q)))\leqslant M_1$ 得$N_N(Z(J(Q)))$幂零, 特别对奇素数 q, $N_N(Z(J(Q)))$为q-幂零, 由引理1.3知N为 q-幂零, 与N是G的非可解极小正规子群矛盾. 这样, 由定理假设, M_1 的CI-截$\mathrm{Sec}(M)$为π'-群, 又由N的唯一性, $\mathrm{Core}_G(M_1) = 1$, 由定义 $M_1\cap N$是M_1的一个CI-截, 故$M_1\cap N$为π'-群, 因此$N_N(Z(J(Q)))$也为π'-群. 而$2\in \pi_1$, 所以2不在π'中, 于是$M_1\cap N$是奇数阶群, 从而 $N_N(Z(J(Q)))$亦是奇数阶群, 故 $N_N(Z(J(Q)))$是2-闭群, 又由q是 $|N|$的任一奇素因子, 由引理 1.5 可知, N 也是 2-闭群, 故 N 可解. 前面证得 H/N 为π-可解, 根据引理 1.6, H也π-可解, 与(G, H)是极小阶反例矛盾. 故这样的极小阶反例不存在. 从而命题得证.

推论 2.3[2] 有限群 G为π-可解的充分必要条件: G的每个非幂零极大子群的CI-截是π'-群.

参考文献

1 Dekins W E. On maximal subgroups. Proc Symp Pure Math, 1959, 1: 100104.

2 Li Shirong, Wang Yanming. On C-section and C-index of finite groups. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309319.

3 钟祥贵. CI-截与群的可解性. 广西科学, 2002, 9(2): 101-103.

4 Gorenstein D. Finite Groups. New York: Chelsea, 1980.

5 Petter M R. A note on finite groups having fixed-free automorphism. Proc Amer Math Soc, 1957, 52: 7980.

6 徐明曜. 有限群导引(下册). 北京: 科学出版社, 1999.

(责任编辑: 黎贞崇)