DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.002
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 284285

6个二色 Van der Waerden 数 $W(3, q)$的下界*
Lower Bounds for Six 2-Color Var der Waerden Numbers $W(3, q)$

罗海鹏[1]　苏文龙[2]　吴 康[3]　黎贞崇[1]
Luo Haipeng[1]　Su Wenlong[2]　Wu Kang[3]　Li Zhenchong[1]

(1. 广西科学院　南宁市星湖路32号　530022; 2. 广西大学梧州分校　广西梧州　543002; 3. 华南师范大学数学系　广东广州　510631)
(1. Guangxi Academy of Sciences, 32 Xinghulu, Nanning, Guangxi, 530022, China; 2. Guangxi University Wuzhou Branch, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 3. Math. Dept. South China Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510631, China)

摘要　给出6个二色 Van der Waerden 数 $W(3, q)$ 的下界: $W(3, 4) \geqslant 18$, $W(3, 5) \geqslant 22$, $W(3, 6) \geqslant 32$, $W(3, 7) \geqslant 46$, $W(3, 8) \geqslant 58$, $W(3, 9) \geqslant 76$.
关键词　Van der Waerden 数　下界　Ramsey 理论　并行计算
中图法分类号　O157.5; TP312

Abstract　Six lower bounds of 2-color Van der Waerden numbers $W(3, q)$ are obtained: $W(3, 4) \geqslant 18$, $W(3, 5) \geqslant 22$, $W(3, 6) \geqslant 32$, $W(3, 7) \geqslant 46$, $W(3, 8) \geqslant 58$, $W(3, 9) \geqslant 76$.
Key words　Van der Waerden number, lower bound, Ramsey theory, parallel compute

1　Van der Waerden 数的存在性

定义1　Van der Waerden 数是具有下述性质的最小正整数 W: 给定 $n \geqslant 2$ 个正整数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 在自然数集 $[W] = \{1, 2, \cdots, W\}$ 的任意 n-部分拆 $\pi_n([W]) = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 中, 必有一个子集 $S_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 含 k_i 个元素构成等差数列.

Van der Waerden 定理[13] 证明了上述正整数 W 的存在性. 我们记这样的 Van der Waerden 数为 $W(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, 并称之为 n 色 Van der Waerden 数. 特别地, 当 $k_1 = k_2 = \cdots k_n = k$ 时, 在文献[16] 中均记为 $W(k, n)$, 我们参照文献[7] 中 Ramsey 数的记法, 简记为 $W_n(k)$.

Van der Waerden 定理是 Ramsey 理论的重要组成部分. 像 Ramsey 数一样, Van der Waerden 数的计算也是组合数学中非常困难的问题. 迄今 Ramsey 数研究已成为学术界的热门课题, 记录众多参考文献和研究成果的动态综述论文[7] 已更新至 #9 版, 但 Van der Waerden 数的研究进展却极其缓慢. 有关 Van der Waerden 数 $W(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 的准确值及其上下界的研究, 参考文献和研究成果极少. 据文献[1, 2] 报道, 迄今已知的非平凡的小 Van der Waerden 数的准确值只有如下5个, 并且都是 $W_n(k)$ 类型的: $W_2(3) = 9$, $W_2(4) = 35$, $W_2(5) = 178$, $W_3(3) = 27$, $W_4(3) = 76$.

对于 Van der Waerden 数 $W_n(k)$, 文献[1, 5, 6] 分别求得下界和上界公式:

$W_2(p+1) > p(2^p - 1)$ [1],

$W_n(k) > n(k-1)^3$ [5],

$W_n(3) < (\frac{n}{4})^{3^n}$ [6].

由 $W_2(4) = 35$ 可知文献[5] 的公式显然有误. 至于 $k_1 \neq k_2$ 的二色 Van der Waerden 数 $W(k_1, k_2)$ 的准确值或其上下界, 迄今尚未见有文献报道.

本文首次报道如下结果:

定理1　$W(3, 4) \geqslant 18$, $W(3, 5) \geqslant 22$, $W(3, 6) \geqslant 32$, $W(3, 7) \geqslant 46$, $W(3, 8) \geqslant 58$, $W(3, 9) \geqslant 76$.

2　计算二色 Van der Waerden 数下界的算法

定义2　给定整数 $p \geqslant 5$ 与自然数集 $[p] = \{1, 2, \cdots, p\}$ 的2-部分拆 $\pi_2([p]) = \{S_1, S_2\}$, 作图 G: 其顶点集 $V(G) = [p]$, 如果 S_i 中的 $l \geqslant 3$ 个数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_l$ 构成一个等差数列, 就在顶点 a_i 到 $a_j (1 \leqslant i < j \leqslant l)$ 之间作一条有向边, 并说从 a_1 到 a_l 之间有一条起点为 a_1 的长度为 l 的 i 色的链, 记为 $l_i(a_1)$. G 的 i 色子图 $G(S_i)$ 中的最大链长记为 $l(S_i)$. 约定, 如果 $|S_i| \leqslant 2$, 就令 $l(S_i) = |S_i|$, 如果 $|S_i| \geqslant 3$ 并且 S_i

2004-06-13 收稿。
*国家自然科学基金(10161003)和广西自然科学基金(桂科自0447010)资助项目。

中任意3个数都不能构成等差数列，就令 $l(S_i)=2$.

根据上述定义与 Van der Waerden 定理，显然有

定理 2 对于集合 $S=[p]$ 的一个 2 部分拆 $S=S_1\cup S_2$，设 $c_1=l(S_1)$, $c_2=l(S_2)$，则有 $W(c_1+1, c_2+1)\geqslant p+1$.

根据上述理论，我们有

算法 1（计算二色 **Van der Waerden** 数 $\boldsymbol{W(k, q)}$ 下界的算法）

步骤 1 给定整数 $p\geqslant 5$ 与参数集 S_1，令 $i=1$.

步骤 2 如果 $s=|S_i|\leqslant 2$，令 $c_i=s$，转到步骤 7，否则，把 S_i 中的元素按从小到大的顺序排列：$a_1<a_2<\cdots<a_s$，作成全序集$(S_i, \lessdot)$. 令 $c_i=0$, $j=1$.

步骤 3 令 $d=a_{j+1}-a_j$, $a=d+a_{j+1}$, $k=j+2$, $c=2$.

步骤 4 如果 $a_k=a$，令 $c=c+1$, $a=a+d$, $k=k+1$，如果 $k\leqslant s$，转到步骤 4.

步骤 5 如果 $c_i<c$，令 $c_i=c$，打印首项为 a_j，公差为 d 的 c 项等差数列.

步骤 6 令 $j=j+1$，如果 $j\leqslant s-2$，转到步骤 3.

步骤 7 令 $i=i+1$，如果 $i=2$，令 $S_2=[p]-S_1$，转到步骤 2.

步骤 8 打印 $W(c_1+1, c_2+1)\geqslant p+1$，运算结束.

显然，在上述算法中得到的 c_i 便是图 $G(S_i)$ 的最大链长 $l(S_i)$. 如果 $c_i\geqslant 3$，那么打印出来的首项为 a_j，公差为 d 的 c_i 项等差数列是全序集$(S_i, \lessdot)$ 中第一条长为 c_i 的 S_i 色的链，此后即使还有其他长为 c_i 的 S_i 色的链，也不会打印出来，除非还有 $c>c_i$.

例 1 令 $p=5$, $S_1=\{1, 2, 4, 5\}$，则 $S_2=[5]-S_1=\{3\}$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=1$，据定理 2 有 $W(3, 2)\geqslant 6$.

例 2 令 $p=8$, $S_1=\{1, 2, 5, 6\}$，则 $S_2=[8]-S_1=\{3, 4, 7, 8\}$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=2$，据定理 2 有 $W(3, 3)\geqslant 9$，即 $W_2(3)\geqslant 9$.

附注 我们的记号 $W(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 与 $W_n(k)$ 是参照文献[7]关于 Ramsey 数 $R(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 与 $R_n(k)$ 的记法制订的，因而与其他文献的记号不同. 上述例 2 的 $W(3, 3)$ 即文献[13]所说的 $W(3, 2)$.

3 定理 1 的证明

(1) 令 $p=17$, $S_1=\{4, 5, 7, 11, 12, 14\}$，则 $S_2=[17]-S_1=\{1, 2, 3, 6, 8, 9, 10, 13, 15, 16, 17\}$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=3$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $1\lessdot 2\lessdot 3$，据定理 2 有 $W(3, 4)\geqslant 18$.

(2) 令 $p=21$, $S_1=\{1, 2, 6, 7, 9, 14, 15, 18, 20\}$，则 $S_2=[21]-S_1=\{3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 21\}$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=4$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $4\lessdot 8\lessdot 12\lessdot 16$，据定理 2 有 $W(3, 5)\geqslant 22$.

为了简便，以下不再写出 S_2 的各项元素.

(3) 令 $p=31$, $S_1=\{1, 2, 7, 9, 14, 15, 18, 24, 25, 31\}$，则 $S_2=[31]-S_1$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=5$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $4\lessdot 6\lessdot 8\lessdot 10\lessdot 12$，据定理 2 有 $W(3, 6)\geqslant 32$.

(4) 令 $p=45$, $S_1=\{1, 3, 8, 11, 17, 18, 22, 29, 30, 32, 37, 39\}$，则 $S_2=[45]-S_1$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=6$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $4\lessdot 7\lessdot 10\lessdot 13\lessdot 16\lessdot 19$，据定理 2 有 $W(3, 7)\geqslant 46$.

(5) 令 $p=57$, $S_1=\{2, 5, 10, 12, 17, 21, 27, 28, 34, 38, 43, 45, 50, 53\}$，则 $S_2=[57]-S_1$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=7$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $1\lessdot 7\lessdot 13\lessdot 19\lessdot 25\lessdot 31\lessdot 17$，据定理 2 有 $W(3, 8)\geqslant 58$.

(6) 令 $p=75$, $S_1=\{6, 12, 17, 19, 23, 25, 30, 36, 39, 45, 50, 52, 56, 58, 63, 69\}$，则 $S_2=[75]-S_1$，由算法 1 得到 $c_1=l(S_1)=2$, $c_2=l(S_2)=8$，并且全序集$(S_2, \lessdot)$中第一条长为 c_2 的 S_2 色的链是 $1\lessdot 3\lessdot 5\lessdot 7\lessdot 9\lessdot 11\lessdot 13\lessdot 15$，据定理 2 有 $W(3, 9)\geqslant 76$.

我们在计算机上完成上述运算所用的时间不到 1 s，但计算 Van der Waerden 数下界的主要困难是寻找有效的参数集 S_1. 由于涉及到巨大的运算量，因此我们应用 3 台计算机（AMD2400）寻找上述各参数集所用的时间是 3×40h，如果采用单机运算，估计其运算时间要 100h 以上.

参考文献

1 Graham R L, Rothschild B L, Spencer J H. Ramsey theory. John Wiley & Sone, 1990.

2 李 乔. 组合数学基础. 北京: 高等教育出版社, 1993.

3 Van der Waerder B L. Beweis einer banudetschen vermutung. Nieuwarch Wisk, 1927, (15): 212216.

4 Schelah S. Primitive recursive bounds for Van der Waerden numbers. Journal of the American Mathematical Society, 1988, (3): 683697.

5 冯秀峰. B L Van der Waerden 数的一个下界. 河南师范大学学报, 1989, (2): 8587.

6 黄益如, 杨建生. Van der Waerden 数 $W(3, n)$ 的新上界公式. 数学年刊, 2000, (5): 631634.

7 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 2004, DS1 ♯10: 1～48.

（责任编辑：黎贞崇）