DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.004
广西科学 Guangxi Sciences 2004，11（4）：289290

一类二阶线性微分方程的振动与非振动判定

Oscillation and Nonoscillation for A Class of Linear Differential Equations of Second Order

张　弘[1]　　严建明[2]　　罗桂烈[2]

Zhang Hong[1]　Yan Jianming[2]　Luo Guilie[2]

（1. 江苏大学理学院数学系　江苏镇江　212013；
2. 广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路 3 号　541004）

（1. Dept. of Math.，Sci. Coll.，Jiangsu Univ.，Zhenjiang，Jiangsu，212013，China；
2. Coll. of Math. & Comp. Sci.，Guangxi Normal Univ.，3 Yucailu，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要　给出判定二阶线性微分方程 $(r(t)y'(t))'+b(t)y'(t)+a(t)y(t)=0$ 的振动和非振动的条件.

关键词　线性微分方程　振动　非振动　正常解　完全格　保序算子
中图法分类号　O175

Abstract　Oscillation and nonoscillation criteria for a class of linear differential equations of second order are given.

Key words　linear differential equations，oscillation，nonoscillation，proper solution，complete lattice，isotonous operator

近年来，由于微分方程振动理论的应用背景极其广泛，因此一直受到广大学者的关注[13].

在文献[3]中，考虑以下的二阶线性微分方程

$$(r(t)y'(t))'+a(t)y(t)=0.$$

本文考虑二阶线性微分方程

$$(r(t)y'(t))'+b(t)y'(t)+a(t)y(t)=0, \tag{1}$$

其中 $t\geqslant t_0$.

方程（1）的不最终恒为零的非常数解称作正常解（proper solutions）[4]. 一个正常解称为振动的，如果它具有任意大的零点；否则，称之为非振动的. 如果一个方程的所有正常解都是振动的，称它为振动的；否则，称之为非振动的.

为了方便叙述,先给出一些记号和假设条件.

记　$I=[t_0,\infty)$, $R_+=(0,\infty)$, $\Phi(t)=\int_t^\infty a(s)\mathrm{d}s$.

(A_1) $a\in C(I,R_+)$;

(A_2) $b\in C(I,R_+)$;

(A_3) $r\in C(I,R_+)$, 且 $\int_{t_0}^\infty \frac{1}{r(t)}\mathrm{d}t=\infty$;

(A_4) $\int_T^\infty a(t)\mathrm{d}t<\infty$, $T>t_0$.

考虑以下的黎卡提方程

$$x'(t)+\frac{1}{r(t)}x^2(t)+\frac{b(t)}{r(t)}x(t)+a(t)=0. \tag{2}$$

定理 1　假设条件 $(A_1)(A_3)$ 满足, 则方程(1)有正解当且仅当方程(2)有正解.

证明　设 $\sup\{t\in[t_0,\infty):a(t)>0\}=\infty$ 且 $y(t)(t\in[T,\infty)\subset(t_0,\infty))$ 是方程(1)的正解.

由文献[5]中的引理可知 $x(t)=\frac{r(t)y'(t)}{y(t)}$ 是正的, 且

$$x'(t)+\frac{1}{r(t)}x^2(t)+\frac{b(t)}{r(t)}x(t)+a(t)=\frac{(r(t)y'(t))'y(t)-r(t)[y'(t)]^2}{y^2(t)}+\frac{r^2(t)[y'(t)]^2}{r(t)y^2(t)}+\frac{b(t)}{r(t)}\frac{r(t)y'(t)}{y(t)}+a(t)=\frac{1}{y(t)}[(r(t)y'(t))'+b(t)y'(t)+a(t)y(t)]=0,$$

故 $x(t)(t\geqslant T)$ 是方程(2)的正解.

设 $x(t)(t\in[T,\infty)\subset(t_0,\infty))$ 是方程(2)的正解. 考虑函数 $y(t)=\exp(\int_T^t\frac{x(s)}{r(s)}\mathrm{d}s)$, $t\geqslant T$.

$$((r(t)y'(t))'+b(t)y'(t)+a(t)y(t)=\exp(\int_T^t\frac{x(s)}{r(s)}\mathrm{d}s)[x'(t)+\frac{1}{r(t)}x^2(t)+\frac{b(t)}{r(t)}x(t)+a(t)]=0,$$

故 $y(t)(t\geqslant T)$ 是方程(1)的正解. 定理证毕.

定义 1　设 X 为半序集, 如果它的每个非空子集在 X 中都有上确界和下确界, 则 X 为完全格.

定义 2　设 X 为半序集, $\Theta: X\to X$ 为一算子, 如

2004-03-23 收稿, 2004-04-26 修回。

果当 $\forall x, y \in X$, $\Theta[x] \leqslant \Theta[y]$ 时, 有 $x \leqslant y$. 那么 Θ 为保序算子.

引理 1[6] 如果 X 为完全格且 Θ 为保序算子, 那么 Θ 在 X 中至少有一个不动点.

引理 2 假设条件 $(A_1)(A_3)$ 满足且 $x(t)(t \geqslant T)$ 是方程(2)的正解, 则

$$x(t) = \int_t^\infty \frac{x^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}x(s)\mathrm{d}s + \int_t^\infty a(s)\mathrm{d}s,\ t \geqslant T. \tag{3}$$

证明 由方程(2)和$(A_1)(A_3)$知, $x(t)$ 在$[T, \infty)$ 上是非增的, 显然也是有界的.

$$x(t) = x(s) + \int_t^s \frac{x^2(u)}{r(u)}\mathrm{d}u + \int_t^s \frac{b(u)}{r(u)}x(u)\mathrm{d}u + \int_t^s a(u)\mathrm{d}u,\ T \leqslant t \leqslant s.$$

令 $s \to \infty$, 得

$$x(t) = \lim_{s\to\infty} x(s) + \int_t^\infty \frac{x^2(u)}{r(u)}\mathrm{d}u + \int_t^\infty \frac{b(u)}{r(u)}x(u)\mathrm{d}u + \int_t^\infty a(u)\mathrm{d}u.$$

$\forall t \geqslant T$, 不妨设 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s) > 0$, 由$(A_3)$得

$$\int_t^\infty \frac{x^2(u)}{r(u)}\mathrm{d}u = \infty,\ \int_t^\infty \frac{b(u)}{r(u)}x(u)\mathrm{d}u = \infty.$$

这与 $x(t)$ 在$[t, \infty)$ 上有界相矛盾, 故此 $\lim\limits_{s\to\infty} x(s) = 0$. 引理证毕.

引理 3 假设条件$(A_1)(A_4)$ 满足且

$$\int_t^\infty \frac{\Phi^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}\Phi(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4}\Phi(t),\ t \geqslant T,$$

则方程(2)至少有一个正解.

证明 设 $\sup\{t \in [t_0, \infty): a(t) > 0\} = \infty$, 那么 $\Phi(t) > 0$, $t \geqslant t_0$.

令 $X = \{x: \Phi(t) \leqslant x(t) \leqslant 2\Phi(t), x'(t) \leqslant 0, \mathrm{Dom}\, x = [T, \infty)\}$, (4)

规定 X 中的顺序为“$\leqslant$”, 即 $\forall x, y \in X$, $x \leqslant y$, 如果当 $\forall t \geqslant T$, 有 $x(t) \leqslant y(t)$. 易知 X 为半序集. 设 Y 是 X 的任一非空子集, 当 $t \geqslant T$, 函数 $x(t) = \sup\{y(t): y \in Y\}$ 是非增的且满足(4). 同理 Y 在 X 中也有下确界. 故此 X 为完全格.

定义 X 上的一个算子 Θ:

$$\Theta[x](t) = \int_t^\infty \frac{x^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}x(s)\mathrm{d}s + \Phi(t),\ t \geqslant T. \tag{5}$$

$$\Phi(t) \leqslant \Theta[x](t) = \int_t^\infty \frac{x^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}x(s)\mathrm{d}s + \Phi(t) \leqslant 4\left(\int_t^\infty \frac{\Phi^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}\Phi(s)\mathrm{d}s\right) + \Phi(t) = 2\Phi(t).$$

显然 $\Theta[X] \subset X$, 因此 Θ 是保序算子. 由引理1得 $\exists x \in X$ 使得 $x = \Theta[x]$. 再由(3)和(5), 引理证毕.

引理 4 假设条件$(A_1)(A_3)$ 满足且

$$\int_{t_0}^\infty a(t)\mathrm{d}t = \infty, \tag{6}$$

则方程(2)没有正解.

证明 不妨设 x 是方程(2)在某个区间$[T, \infty) \subset (t_0, \infty)$上的正解. 由(2)可得 $x'(t) \leqslant -a(t)$, $t \geqslant T$. 对此不等式从 T 到 t 积分($t > T$), 再根据(6)式就能导出矛盾. 引理证毕.

根据定理 1 和上述的一些引理, 得出

定理 2 假设条件$(A_1)(A_4)$ 满足且

$$\int_t^\infty \frac{\Phi^2(s)}{r(s)}\mathrm{d}s + \int_t^\infty \frac{b(s)}{r(s)}\Phi(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4}\Phi(t),\ t \geqslant T,$$

则方程(1)是非振动的.

证明 由引理3可知方程(2)存在一个正的特解, 由变换可将原方程变为伯努利方程, 这样就能构作方程(2)一个基本解 $x(t) > 0$), 再根据 $y(t) = \exp\left(\int_T^t \frac{x(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\right)$, 显然, 方程(1)是非振动的. 定理证毕.

定理 3 假设条件$(A_1)(A_3)$ 满足且

$$\int_{t_0}^\infty a(t)\mathrm{d}t = \infty,$$

则方程(1)是振动的.

证明 假设方程(1)是非振动的, 不失一般性, 不妨设方程(1)的解 $x(t)$ 最终正的, 这显然与引理4相矛盾, 故方程(1)是振动的. 定理证毕.

例1 选取 $r(t) = 1$, $b(t) = \frac{1}{4}$, $a(t) = \mathrm{e}^{-t}$, 显然, 能满足定理 2 的所有条件, 故方程 $y''(t) + \frac{1}{4}y'(t) + \mathrm{e}^{-t}y(t) = 0$ 是非振动的.

例2 选取 $r(t) = 1$, $b(t) = 1$, $a(t) = 1$, 显然, 能满足定理3的所有条件, 方程 $y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$ 有解 $y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$, 且该解是振动的, 故方程(1)是振动的.

参考文献

1 王其如. 二阶非线性微分方程的振动准则. 数学学报, 2001, 44(2): 371376.

2 杨小京. 一类拟线性二阶微分方程解的振动与非振动的判定. 数学学报, 2001, 44(2): 311318.

3 Seman J. Oscillation of solutions to second order linear differential equations. Electronic J Diff Equa, 2004, 28: 19.

4 Rogovchenko Y V. Oscillation criteria for certain nonlinear differential equations. J Math Anal Appl, 1999, 229(2): 399416.

5 Kiguradze I T. On the oscillation of solutions of the equation $\mathrm{d}^m u/\mathrm{d}t^m + a(t)\,|u|^n \mathrm{sign}\, u = 0$. Mat Sb, 1964, (65): 172-187.

6 Tarski A. A lattice theoretical fix point theorem and its applications. Pacific J Math, 1995, (5): 285309.

(责任编辑: 黎贞崇)