DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.006
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 296299

一类包含 σ 紧空间和可分空间的拓扑空间
A Class of Topological Spaces Which Contain σ-Compact Spaces and Separable Spaces

陈海燕　　郑顶伟　　吴　磊
Chen Haiyan　Zheng Dingwei　Wu Lei

(广西大学数学与信息科学学院　南宁市大学路 100 号　530004)
(Coll. of Math. &Info. Sci., Guangxi Univ., 100 Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　定义 $*\sigma$ 紧空间的概念, 讨论 $*\sigma$ 紧空间的一些性质以及 $*\sigma$ 紧性与 $*$*Lindelöf* 性, *c. c. c* 与可分性之间的关系, 结合点可数基讨论了一些空间的某些性质.
关键词　拓扑空间　$*\sigma$ 紧　可分性　*Lindelöf*　$*$*Lindelöf* 性　点可数基
中图法分类号　O189.1

Abstract　The definition of $*\sigma$- compact spaces is given which is the generalization of σ- compact spaces and separable spaces. Some properties of $*\sigma$- compact spaces and the relationship of $*\sigma$- compactness with $*$*Lindelöf*, *c. c. c* and separability are discussed. Meanwhile, some point countable base certain properties of some spaces are discussed and narrated.
Key words　topological space, $*\sigma$- compact, separability, *Lindelöf*, $*$*Lindelöf* property, point countable base

1　相关定义

作为可分度量空间性质的一般化, 可数覆盖性质对于一般拓扑学的起源和发展起到很大的作用, 是一般拓扑学进步的主线索和前进的源泉之一. 由此所诱发的、寻求更一般性的可数覆盖性质理所当然地成为一般拓扑学工作者的重要研究方向之一, 如戴牧民[1]关于 $*$*Lindelöf* 空间的工作, E. K. van Douwen 等[2] 关于星覆盖性质以及近年来 M. V. Matveev[3] 关于星 *Lindelöf* 空间的工作都是非常典型和具有特别意义的事件. σ 紧性和可分性都是重要的可数性质, 探讨这两个互不蕴涵的拓扑性质之间的共性以及与其它可数覆盖性质之间的联系同样必不可少.

本文受 1964 年 H. Corson 和 E. Mihcael[4] 关于稠可分度量子空间工作: "具有点可数基的正则空间如存在 σ 紧稠子集, 则可度量, 以及 M. V. Matveev[5] 关于 acc 空间定义"的启发, 引入了紧性和可分性的一种推广性质: $*\sigma$ 紧性, 分析 $*\sigma$ 紧性与一些可数性质(如, 可分性、*Lindelöf* 性, $*$*Lindelöf* 性、弱 *Lindelöf* 性、1 星 *Lindelöf* 性、DCCC 性质和 *c. c. c* 性质等)之间的关系, 探讨 $*\sigma$ 紧性的几类运算性质(如可数可积性、映射性质、逆映射性质和遗传性)及 $*\sigma$ 紧性在广义度量空间理论中的作用(如在可展空间类、具有点可数基空间类中的等价性质), 提出若干可供进一步研究的问题.

在一般的拓扑学中, σ 紧性、*Lindelöf* 性、$\aleph_1$ 紧性、可分性及 *c. c. c*(可数链条件) 均是人们所熟悉的. 对于一般的拓扑空间, 有下列蕴涵关系:

σ 紧性 → *Lindelöf* 性 → $\aleph_1$ 紧性和 DCCC,

可分性 → *c. c. c* → DCCC.

并且它们是不可逆的, 对于不可约空间, *Lindelöf* 性与 $\aleph_1$ 紧性等价. 本文提出 $*\sigma$ 紧空间的概念, 讨论它的性质以及它与上述几类性质之间的关系, 得到 $*\sigma$ 紧空间是 DCCC 的以及具有分离性(P) 的空间类, $*\sigma$ 紧空间是 $*$*Lindelöf* 空间等系列结果.

定义 1.1　拓扑空间 X 称为 $*$*Lindelöf* 空间, 如果对于 X 的任何开覆盖 $\mathscr{G}$ 都相应有一个可数开覆盖 $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}$ 加细 $\{st(x, \mathscr{G}): x \in X\}$.

此定义是在文献[1] 中提出的, 且在该文中给出 $*$*Lindelöf* 空间的一个充要条件, 即 X 是 $*$*Lindelöf* 空

2004-04-16 收稿, 2004-08-18 修回。

间当且仅当对于 X 的任何开覆盖 $\mathscr{G}$ 都存在可数子集 $A=\{x_n\}_{n\in N}$，使

$$\bigcup_{n\in N}\mathrm{st}(x_n,\mathscr{G})=X.$$

文献[2]，推广了 *Lindelöf 空间的定义.

定义 1.2 (i)空间 X 称为 *n-star-Lindelöf*，如果对任何开覆盖 $\mathscr{U}$，则存在可数子族 V，使得 $\mathrm{st}^n(\bigcup\mathscr{V},\mathscr{U})=X$.

(ii)空间 X 称为 *strong-n-star-Lindelöf*，如果对任何开覆盖 $\mathscr{U}$，则存在可数子集 $B\subset X$，使得 $\mathrm{st}^n(B,\mathscr{U})=X$. 由定义(ii)可见，*Lindelöf 空间是 $n=1$ 时的特殊情形.

定义 1.3 空间 X 称为弱 Lindelöf 的，如果对任何开覆盖 $\mathscr{U}$，都存在可数子族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$，使得 $\overline{\bigcup\mathscr{U}'}=X$.

其它定义和符号见文献[6,7].

2 基本性质

定义 2.1 拓扑空间 X 称为 *σ 紧空间，如果 X 含有一个 σ 紧的稠密子集. 即存在 $C=\bigcup_{n\in N}C_n$，C_n 紧于 X，C 稠密于 X.

由定义 2.1 可看出，*σ 紧空间是 σ 紧空间和可分空间的共同推广.

定理 2.1 *σ 紧空间是弱 Lindelöf 的.

证明 设 X 是 *σ 紧空间，$C=\bigcup_{n\in N}C_n$ 是 X 的 σ 紧的稠密子集，设 $\mathscr{U}=\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的任意开覆盖，对每个 C_n，由于 C_n 紧，而 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 覆盖 C_n，故可选出有限个 U_α 覆盖 C_n. 从而在 $\mathscr{U}$ 中可选出可数个 U_α 覆盖 C，记这可数个 U_α 为 $\{U_i\}_{i\in N}$，所以 $C\subset\bigcup_{i\in N}U_i$. 从而 $\overline{U_{i\in N}U_i}=X$，即 X 是弱 Lindelöf 的. 定理证毕.

定理 2.2 *σ 紧空间 X 是 *1-star-Lindelöf* 的.

证明 设 $C=\bigcup_{n\in N}C_n$ 是 X 的 σ 紧的稠密子集，则对任何开覆盖 $\mathscr{U}$，有 $\mathrm{st}(C,\mathscr{U})=X$. 对每个 n，由于 C_n 为紧的，则存在有限个 $\mathscr{U}$ 中的元覆盖 C_n，从而可数个元覆盖 C，我们把这可数个元所成族记为 $\mathscr{V}$，则 $\mathrm{st}(\bigcup\mathscr{V},\mathscr{U})\supset\mathrm{st}(C,\mathscr{U})=X$. 所以 X 是 *1-star-Lindelöf* 的. 定理证毕.

注 1 *Lindelöf 空间是 *strong-1-star-Lindelöf* 空间，而 *σ 紧空间 X 是 *1-star-Lindelöf* 空间，并且它们都是可分空间的推广，我们可能猜测 *Lindelöf 空间是 *σ 紧空间，但以下例子说明，*Lindelöf 空间不蕴含 *σ 空间.

例 2.1 由 *Lindelöf 空间不能推出 *σ 紧性. 取 $X=\omega_1\cup\{\omega_1\}$，对 X 赋予以下拓扑，$\alpha<\omega_1$，令 $\{\alpha\}$ 为开集. 包含点 ω_1 的集 U 是开的当且仅当 $X-U$ 是可数集. 则 X 是 T_3，Lindelöf 的，从而 X 是 *Lindelöf 的. 但 X 中的紧子集是有限集，可数个紧子集的并集是可数集，可记为 $B=\{x_i\}_{i\in N}$，B 不稠密于 X，知 X 不是 *σ 紧的.

问题 1 能否找到一个不是 *Lindelöf 空间的 *σ 紧空间？

定理 2.3 可数个 *σ 紧空间的积空间是 *σ 紧空间.

证明 设 X_i 是 *σ 紧空间，$K_i=\bigcup_{n\in N}K_{i,n}$ 是其 σ 紧的稠密子集. 设

$$X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$$

下面要证 X 是 *σ 紧空间. 置

$\mathscr{W}_n=\{\prod_{i=1}^{n}K_{i,l}\times\prod_{j=n+1}^{\infty}K_{j,n}$ 其中 $l\in N$，$i\leqslant n\}$，

令 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\omega_n$.

由于 $\mathscr{W}_n$ 是可数集族，且每个元是 X 中的紧子集. 从而 $\bigcup W$ 是 σ 紧子集. 下证 $\bigcup\mathscr{W}$ 是 X 的稠密子集. 任取 $x=(x_i)_{i\in N}\in X$，U 是其任意开邻域. 由乘积拓扑，则存在某个 n，使得 $\prod_{i\leqslant n}V_i\times\prod_{i>n}X_i\subset U$，其中 $V_i\subset X_i(i\leqslant n)$. 由于每个 V_i 是 x_i 的开邻域，K_i 稠密于 X_i，存在 $l\in N$ 使得

$$V_i\cap K_{i,l}\neq\varnothing,$$

对每个 $i\leqslant n$.

$\prod_{i\leqslant n}V_i\times\prod_{i>n}K_{i,n}\in\omega_n$，

$(\prod_{i\leqslant n}V_i\times\prod_{i>n}X_i)\cap(\prod_{i\leqslant n}K_{i,l}\times\prod_{i>n}K_{i,n})=\prod_{i\leqslant n}(V_i\cap K_{i,l})\times\prod_{i>n}K_{i,n}\neq\varnothing$.

即 $U\cap\bigcup\mathscr{W}\neq\varnothing$. 所以 $\bigcup\mathscr{W}$ 稠密于 X，从而知 X 是 *σ 紧的. 定理证毕.

注 2 E.Marczewski[8] 证明了不超过 c(连续统的势)个可分空间的积空间是可分的空间. 而文献[9]给出了一个例子说明可数个 σ 紧空间的积空间却不一定是 σ 紧空间.

定理 2.4 *σ 紧空间在连续映射下的像是 *σ 紧的.

证明 设 X 是 *σ 紧空间，$C=\bigcup_{n\in N}C_n$ 是 X 的 σ 紧的稠密子集. f 是从 X 到 Y 上的连续映射，则 $f(C)=\bigcup_{n\in N}f(C_n)$ 为 Y 的 σ 紧子集. 由于 C 在 X 中稠密，而 f 是从 X 到 Y 上的连续满映射，由文献[10]命题 3.1.7 知 $f(C)$ 在 Y 中稠密，从而得证.

定理 2.5 *σ 紧空间在开 k 映射下的原像是 *σ 紧的.

证明 设 f 是 X 到 Y 上的开 k 映射，Y 是 *σ 紧的. 设 $K=\bigcup K_n$ 为 Y 的稠密子集，由 k 映射定义知，

存在 $C=\bigcup_{n\in N}C_n$，其中每一 $C_n=f^{-1}(K_n)$ 是 X 中紧集. 任取 $x\in X$，U 为 x 的开邻域，由 $f(x)\in Y$ 及 K 为稠的知，若 $U\cap C=\varnothing$，即 $U\cap(\bigcup_{n\in N}C_n)=\varnothing$. 也即 $f(U\cap(\bigcup_{n\in N}C_n))=\varnothing$，$\bigcup_{n\in N}(f(U)\cap f(C_n)=\varnothing$. 所以 $f(U)\cap K=\varnothing$，矛盾，故 $U\cap C\neq\varnothing$，所以 C 稠密于 X，即 X 是 $*\sigma$ 紧的. 定理证毕.

注 3 实际上把开映射减弱为几乎开映射，定理依然成立.

关于遗传性，有下面 2 个性质:

定理 2.6 $*\sigma$ 紧空间中的正则闭集是 $*\sigma$ 紧的，从而开闭集是 $*\sigma$ 紧的.

证明 设 $C=\bigcup C_n$ 是 X 的 σ 紧稠子集，M 是 X 的正则闭集，令 $D_n=M\cap C_n$，则 D_n 为 X 紧且 $D_n\subset M$，又 $\overline{M^0}=M$，C 为稠密的，则 $\overline{M^0\cap C}=\overline{M^0}$，所以

$$\overline{\bigcup_{n\in N}D_n}^M=\overline{\bigcup_{n\in N}(M\cap C_n)}^M=\overline{M\cap C}^M\supset\overline{M^0\cap C}\cap M=\overline{M^0}\cap M=M,$$

因而知 M 是 $*\sigma$ 紧的. 而开闭集是正则闭集，从而开闭集是 $*\sigma$ 紧的. 定理证毕.

定理 2.7 若 $*\sigma$ 紧空间 X 是完备的，则 X 的每个开子空间仍是 $*\sigma$ 紧的.

证明 设 $C=\bigcup_{n\in N}C_n$ 是 X 的 σ 紧稠子集，M 是 X 的开子空间，由假设，$M=\bigcup_{n\in N}F_n$，其中每个 F_n 是 X 中闭集，置

$$M\cap(\bigcup_{n\in N}C_n)=(\bigcup_{n\in N}F_n)\cap(\bigcup_{m\in N}C_m)=\bigcup_{n,m\in N}(F_n\cap C_m).$$

显然，$F_n\cap C_m$ 是 X 中的紧子集($n, m\in N$). 且 $\{F_n\cap C_m: n, m\in N\}$ 是可数集族. 下证 $\overline{\bigcup(F_n\cap C_m)}^M=M$.

左边 $=\overline{\bigcup_{n,m\in N}(F_n\cap C_m)}\cap M=\overline{M\cap\bigcup C_m}\cap M=\overline{M\cap C}\cap M\subset M$ 显然. 另一方面，因为 C 稠密于 X，M 开于 X，知 $\overline{M\cap C}\supset M$. 所以等式成立. 定理证毕.

定理 2.8 具有 G_δ 对角线的 T_2 $*\sigma$ 紧空间 X 是可分的.

证明 设 X 是具有 G_δ 对角线的 T_2 $*\sigma$ 紧空间，$C=\bigcup C_n$ 是 X 的 σ 紧稠子集. 由文献[11]具有 G_δ 对角线的 T_2 紧空间具有可数基，从而是可度量化的可分空间. 对每个子空间 C_k，C_k 为正则紧的，且由 G_δ 对角线的遗传性知对每个 $k\in N$ 存在可数子集 $D_k\subset C_k$，$\overline{D_k}^{C_k}=C_k$，所以 $D=\bigcup_{k\in N}D_k$ 稠密于 $C=\bigcup_{k\in N}C_k$，从而 D 稠密于 X. 定理证毕.

例 2.2 正则 $W\Delta$ 空间 + $*\sigma$ 紧空间不能推出可分性. 取 $X=[0, \mathscr{W}]$，X 取通常的序拓扑，则 X 是正则紧的，从而是 $W\Delta$ 空间和 $*\sigma$ 紧空间，但 X 却不是可分的.

定理 2.9 在 T_2 可展空间类中，下列条件等价:

(1) X 是 $*Lindel\ddot{o}f$ 的; (2) X 是可分的; (3) X 是 $*\sigma$ 紧的.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2)在文献[1]中已证; (2)$\Rightarrow$(3)由 $*\sigma$ 紧空间的定义知; (3)$\Rightarrow$(1)由定理 2.10. 定理证毕.

定理 2.10 $*\sigma$ 紧空间是 DCCC 的(离散可数链条件).

证明 设 X 是 $*\sigma$ 紧空间，$C=\bigcup_{n\in N}C_n$ 是 X 的 σ 紧的稠密子集，设 $\mathscr{U}=\{u_\alpha\}$ 是 X 中的离散开族，由于 C 是稠密的，所以每个 u_α 必与 C 相交，从而与某个 C_n 相交. 又由每个 C_n 是紧的，而紧集 C_n 中的离散开族是有限的，所以和 C_n 相交的 u_α 是有限的，故 $|\mathscr{U}|\leqslant(\omega\times\omega)=\omega$. 即知 X 是 DCCC 的. 定理证毕.

下面给出 2 个例子说明 $*\sigma$ 紧与 $c.c.c$ 互不蕴涵.

例 2.3 $c.c.c$ 不能推出 $*\sigma$ 紧性. 在文献[2]中，例 3.2.3.2 构造了一个例子: 一个 $c.c.c$ 的 Moore 空间 X 不是 $*Lindel\ddot{o}f$ 的. 由定理 2.9 知 X 也不是 $*\sigma$ 紧的.

例 2.4 紧性不能推出 $c.c.c$，从而 $*\sigma$ 紧不能推出 $c.c.c$. 取 $X=[0,\omega_1]$，并取通常序拓扑，则 X 是紧的，但 X 不是 $c.c.c$ 的.

定理 2.11 T_2 局部紧的弱 $Lindel\ddot{o}f$ 空间 X 是 σ 紧的，从而是 $*\sigma$ 紧的.

证明 由 X 是局部紧的，对每一 $x\in X$，存在一个紧的领域 V_x，使得 $\overline{V_x}$ 紧，因为 $\bigcup_{x\in X}V_x=X$，由 X 是弱 $Lindel\ddot{o}f$ 的，知存在可数个 $\{x_i\}_{i\in N}$ 使得 $\overline{\bigcup_{i\in N}V_{x_i}}=X$，则 $\bigcup_{i\in N}\overline{V_{x_i}}=X$，从而 X 是 $*\sigma$ 紧的. 定理证毕.

定理 2.12[6] 若 X 是 T_2 仿紧空间且包含一个 $Lindel\ddot{o}f$ 的稠子集 A，则 X 是 $Lindel\ddot{o}f$ 空间.

推论 2.1 T_2 仿紧的 $*\sigma$ 紧空间 X 是 $Lindel\ddot{o}f$ 的.

问题 2 推论 2.1 中的仿紧条件能否减弱为弱仿紧或者减弱为集态正规，而结论仍然成立?

定义 2.2 空间 X 称为具有分离性(P)，如果 X 的任何一个势为 ω_1 的离散集 D 都存在一个按点可数的开族 $\mathscr{U}$(即 $\forall x\in X$，$\mathrm{ord}(x,\mathscr{U})\leqslant\omega$)，使 $D\subset\mathscr{U}^*$，并且对每个 $U\subset\mathscr{U}$，$|U\cap D|\leqslant\omega$.

定理 2.13 对于具有 T_1 分离性(P)的空间类，$*\sigma$ 紧空间是 $*Lindel\ddot{o}f$ 的.

证明 由文献[1]知，在 T_1 分离性(P)条件下，

$\aleph_1$ 紧性与 *Lindelöf 等价，所以只须证明 X 是 $\aleph_1$ 紧即可。假若 X 不是 $\aleph_1$ 紧的，则存在一个势为 ω_1 的离散子集 D，由分离性（P）存在一个按点可数的开族 $\mathscr{U}$，使 $D \subset \mathscr{U}^*$，并且对每个 $U \subset \mathscr{U}$，$|U \cap D| \leqslant \omega$。令

$$\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{U} \cup \{X - D\},$$

则 $\overline{\mathscr{U}}$ 是 X 的按点可数开覆盖，由于 X 是 $*\sigma$ 紧的，知存在 $\{x_i\}_{i\in N}$ 使 $\overline{\bigcup_{i\in N}\mathrm{st}(x_i, \mathscr{U})} = X$。对每个 n 顶多有可数个 $\mathscr{U}$ 的元包含 x_n，于是

$$|\mathrm{st}(x_i, \overline{\mathscr{U}}) \cap D| = |\mathrm{st}(x_i, \mathscr{U}) \cap D| \leqslant (\omega \times \omega) = \omega.$$

记为 $\{x_{i,j}\}_{j\in N}$。从而

$$|D| = |X \cap D| = |\overline{\bigcup_{n\in N}\mathrm{st}(x_n, \overline{U})} \cap D| =$$

$$|(\overline{\bigcup_{n\in N}\mathrm{st}(x_n, \overline{\mathscr{U}})}) \cap D| = |\overline{\bigcup_{n\in N}(\mathrm{st}(x_n, \overline{\mathscr{U}}) \cap D)}|$$

$$= |\overline{\bigcup_{i,j\in N}\{x_{ij}\}}| = |\{x_{ij}\}_{i,j\in N}| \leqslant \omega,$$

其中，每个 $x_{i,j} \in D$，而 D 为离散闭子集。这与 $|D| = \omega_1$ 矛盾，故 X 是 $\aleph_1$ 紧的，也就是 *Lindelöf 的。

从定义 2.2 可以看出：（1）σ 族正规性（σCWN）（定义见文献[11]）；（2）σ 按点族正规性（$\sigma pCWN$）（定义见文献[12]）；（3）族 *Hausdorff* 性（CWH，即对任意离散集 $D = \{x_\alpha\}$ 都存在互斥开族 $\mathscr{U} = \{u_\alpha\}$，对每个 α，$x_\alpha \in u_\alpha$）都是分离性（P）的特例。所以对上述三类空间而言，定理 2.13 也成立。

定理 2.14[13] 具有点可数基的正则 $*\sigma$ 紧空间 X 是可度量的。

定理 2.15[7] 具有点可数基的 T_1 可数紧空间 X 是可分的。

定理 2.16 具有点可数基的 T_1 $*\sigma$ 紧空间 X 是可分的。

证明 设 X 是 $*\sigma$ 紧空间，$C = \bigcup C_k$ 是 X 的 σ 紧的稠密子集。由于每一 C_k 是紧的且点可数基是遗传的，由定理 2.15，则每一 C_k 是可分的。即对每个 $k \in N$ 存在可数子集 $D_k \subset C_k$，$\overline{D_k}^{C_k} = C_k$，所以 $D = \bigcup_{k\in N} D_k$ 稠密于 $C = \bigcup_{k\in N} C_k$，从而 D 稠密于 X。定理证毕。

参考文献

1 戴牧民. 一类包含 Lindelöf 空间和可分空间的拓扑空间. 数学年刊, 1983,（5）: 571575.

2 E K van Douwen, Reed G M, Roscoe A W, et al. Star covering properties. Topology Appl, 1991,（39）: 71103.

3 Matveev M V. A survey on star-covering properties. Topology Atlas, 1998, 330.

4 Corson H, Michael E. Metrizability of certain countable unions. Illinois J Math, 1964,（8）: 351360.

5 Matveev M V. Absolutely countably compact spaces. Tapology Appl, 1994,（58）: 8192.

6 Engelking R. General Topology, PWN, Warsaw, Topology Appl, 1977.

7 高国士. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 2000.

8 Marczewski E. Separabilite et mutiplication cartesian products. Fund Math, 1952, 39: 229238.

9 汪 林, 杨富春. 拓扑空间中的反例. 北京: 科学出版社, 2000.

10 蒲保明, 蒋继光, 胡淑礼. 拓扑学. 北京: 高等教育出版社, 1985.

11 刘应明. 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间. 数学学报, 1977, 20(3): 212214.

12 戴牧民. 按点族正规性, 亚紧性和按点有限基. 数学学报, 1981, 24(5): 656667.

13 Ponomarev V. Axioms of countability and coutinuous mappings. Bull Pol Acad Math, 1960,（8）: 127133.

（责任编辑：黎贞崇）

（上接第 295 页 Continue from page295）

4 Wong J S. Criterion for forced second order linear differential equations. J Math Anal Appl, 1999, 231: 235340.

5 Philos Ch G. Oscillation theorems linear differential equations of second order. Arch Math, 1989, 53: 483492.

6 Ei-sayed M A. An oscillation criteria for a forced second-order linear differential equations. Proc Amer Math, 1993, 118: 813817.

7 Yang Qigui. Interval oscillation criterion for forced second order nonlinear ODE with oscillatory potential. Applid Mathematics and Compution, 2003, 135: 4964.

8 Kong Q. Interval criteria for oscillation of second order linear oscillation. J Math Anal Appl, 1999, 229: 285370.

（责任编辑：黎贞崇）