DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2004.04.007
广西科学 Guangxi Sciences 2004, 11 (4): 300302

等幂和与 Bernoulli 数的通解公式*

The General Solution of the Sum of Equal Powers and Bernoullis Numbers

王云葵

Wang Yunkui

(广西民族学院计算机与信息科学学院 南宁市大学路 530006)

(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Daxuelu, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 给出等幂和与 Bernoulli 数的通解公式,从而改进了陈景润与黎鉴愚及文献[9]的结果.

关键词 等幂和 Bernoulli 数 通解 *M-N* 表示

中图法分类号 O156

Abstract A formula is presented to obtain the general solution of the sum of equal powers and Bernoulli numbers. The related programme is also revealed. The results improve the previous report in the relevant reference.

Key words sum of equal powers, Bernoullis numbers, general solution, *M-N* expression

1 关于等幂和的 *M-N* 表示

等幂和与 Bernoulli 数在 Bowen[1] 猜想及判别素数充要条件[2-4] 等数论问题的研究中扮演着极为重要的角色. 等幂和问题自从 2000 多年前希腊数学家阿基米德开始,就吸引着许多数学家的兴趣,但直到 1984 年为止,国内外数学家才仅仅求得前 60 个 Bernoulli 数和前 13 个等幂和公式[5]. 1984 年陈景润与黎鉴愚获得了等幂和的 *M-N* 表示,从而获得了前 30 个幂和公式.

定理 A[5-8] 设 n, k 为自然数, $M=2n+1$, $N=n(n+1)$, 则有

$$S_{2k}(n)=\frac{M}{4k+2}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r A(k,r)N^{k-r},$$

$$S_{2k+1}(n)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\frac{A(k,r)}{2(k+1-r)}N^{k-r+1},$$

其中, $A(k,r)$ 是等幂和表为 N 的多项式的系数;

$A(k,0)=1$; $A(k,1)=\frac{1}{3}C_k^2$; $A(k,2)=\frac{1}{60}(7k-1)C_k^3$;

$A(k,3)=\frac{1}{630}(31k^2-27k-10)C_k^4$;

$A(k,4)=\frac{1}{5040}(127k^3-310k^2+37k+90)C_k^5$;

$A(k,5)=\frac{1}{166320}(2555k^4-12674k^3+14161k^2+2486k-3864)C_k^6$.

他们在证明定理时利用了复杂的递推公式,篇幅很长,而且计算高次幂和公式时也不是很方便. 1993 年王云葵与邓培民改进了陈景润与黎鉴愚的结果,证明了:

定理 B[9] 设 $k\geqslant 1$, B_{2k} 是 Bernoulli 数,则有

$$\begin{cases} A(k,0)=1,\ A(k,1)=k(k+1)/6, \\ A(k,r)=(C_{k-r+1}^2A(k,r-1)+C_{2k+1}^2A(k-1,r))/C_{2k-2r+1}^2,\ (1\leqslant r\leqslant k-1), \\ A(k,k-2)=3A(k,k-1)=(-1)^{k-1}6(2k+1)B_{2k}, \end{cases} \tag{1}$$

$$A(k,r)=\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{C_{k-r+j}^{2j}}{2j+1}A(k,r-j), \tag{2}$$

$$A(k,r)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}C_{k+1}^{2j+1}A(k-j,r-j), \tag{3}$$

$$A(k,k-r)=2(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{[\frac{r-1}{2}]}C_{2r-2j+1}^{r}C_{2k+1}^{2j+1}B_{2k-2j}, \tag{4}$$

$$A(k,r)=(-\frac{1}{4})^r\sum_{j=0}^{r}(2-4^j)B_{2j}C_{k-j}^{r-j}C_{2k+1}^{2j}, \tag{5}$$

2004-01-17 收稿, 2004-07-12 修回。
*广西民族学院重点科研项目资助课题(03SXX00001)。

$$\sum_{j=0}^{k}(2-4^{j})B_{2j}C_{2k+1}^{2j}=0. \tag{6}$$

陈瑞卿[10]、朱豫根和刘玉清[11]研究了等幂和的系数 $A(k,r)$ 的递推关系，但这些结果均可由(1)(3)推出. 2001 年王云葵[12]曾利用笔算获得前 110 个 Bernoulli 数和前 111 个等幂和公式，但是工作相当繁杂. 为了能够快速准确地得到等幂和公式，本文改进了陈景润与黎鉴愚及文献[9]的结果，从而获得了等幂和与 Bernoulli 数的通解公式.

2 几个引理

引理 1 设 k, r, m 均为正整数，$k\geqslant r$，则有

$$f(m)=C_{2k+1}^{2m}C_{k-m}^{r-m}-C_{2r+1}^{2m}C_{k}^{r}=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{4^{m-j}C_{m}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+m-j}^{r-m}C_{k}^{r+m-j}}{C_{r}^{j}C_{2m}^{j}}. \tag{7}$$

证明 当 $m=1$ 时，$f(1)=C_{2k+1}^{2}C_{k-1}^{r-1}-C_{2r+1}^{2}C_{k}^{r}=(r(2k+1)-r(2r+1))C_{k}^{r}=4C_{r+1}^{2}C_{k}^{r+1}$，即当 $m=1$ 时结论成立；假设当 $m=s$ 时结论成立，则当 $m=s+1$ 时，

$$f(s+1)=C_{2k+1}^{2s+2}C_{k-s-1}^{r-s-1}-C_{2r+1}^{2s+2}C_{k}^{r}=$$
$$\frac{(2k-2s+1)(r-s)}{(2s+1)(s+1)}C_{2k+1}^{2s}C_{k-s}^{r-s}-C_{2r+1}^{2s+2}C_{k}^{r}=$$
$$\frac{(2k-2s+1)(r-s)}{(2s+1)(s+1)}(f(s)+C_{2r+1}^{2s}C_{k}^{r})-C_{2r+1}^{2s+2}C_{k}^{r}=$$
$$\frac{(r-s)[2(k-r-s+j)+(2r-2j+1)]}{(s+1)(2s+1)}f(s)+(\frac{2k-2s+1}{2r-2s+1}-1)C_{2r+1}^{2s+2}C_{k}^{r}=$$
$$\sum_{j=0}^{s-1}\frac{2(r-s)(k-r-s+j)4^{s-j}C_{s}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s-j}^{2s-j}C_{k}^{r+s-j}}{(s+1)(2s+1)C_{r}^{j}C_{2s}^{j}}+$$
$$\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(r-s)(2r-2j+1)4^{s-j}C_{s}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s-j}^{2s-j}C_{k}^{r+s-j}}{(s+1)(2s+1)C_{r}^{j}C_{2s}^{j}}+$$
$$\frac{2(r+1)(r-s)}{(s+1)(2s+1)}C_{2r+1}^{2s}C_{k}^{r+1}=$$
$$\sum_{j=0}^{s-1}\frac{4^{s+1-j}C_{s}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s+1-j}^{2s+2-j}C_{k}^{r+s+1-j}}{C_{r}^{j}C_{2s+2}^{j}}+\frac{4C_{s}^{s}C_{2s}^{s}C_{2r+1}^{2s}}{C_{r}^{s}C_{2s+2}^{s}}C_{r+1}^{s+2}C_{k}^{r+1}+$$
$$\sum_{j=1}^{s}\frac{(r-s)(2r-2j+3)4^{s+1-j}C_{s}^{j-1}C_{2j-2}^{j-1}C_{2r+1}^{2j-2}C_{r+s+1-j}^{2s+1-j}C_{k}^{r+s-j}}{(s+1)(2s+1)C_{r}^{j-1}C_{2s}^{j-1}}=$$
$$\sum_{j=0}^{s}\frac{4^{s+1-j}C_{s}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s+1-j}^{2s+2-j}C_{k}^{r+s+1-j}}{C_{r}^{j}C_{2s+2}^{j}}+$$
$$\sum_{j=1}^{s}\frac{4^{s+1-j}C_{s}^{j-1}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s+1-j}^{2s+2-j}C_{k}^{r+s+1-j}}{C_{r}^{j-1}C_{2s+2}^{j}}=$$
$$\sum_{j=1}^{s}\frac{4^{s+1-j}(C_{s}^{j-1}+C_{s}^{j})C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s+1-j}^{2s+2-j}C_{k}^{r+s+1-j}}{C_{r}^{j}C_{2s+2}^{j}}+$$
$$4^{s+1}C_{r+s}^{2s+2}C_{k}^{r+s+1}=\sum_{j=0}^{s}\frac{4^{s+1-j}C_{s+1}^{j}C_{2j}^{j}C_{2r+1}^{2j}C_{r+s+1-j}^{2s+2-j}C_{k}^{r+s+1-j}}{C_{r}^{j}C_{2s+2}^{j}},$$

此即当 $m=s+1$ 时成立，故对任意自然数 m，(7)式均成立.

引理 2 设 k, r, m 均为正整数，$k\geqslant r+1$ 则有

$$C_{k-r-1}^{m}=\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}b(m,j)k^{m-j}, \tag{8}$$

其中，
$$\begin{cases}b(m,0)=b(0,0)=1,\ b(m,m)=m!C_{r+m}^{m}\\ b(m,j)=b(m-1,j)+(r+m)b(m-1,j-1).\end{cases} \tag{9}$$

证明 对 m 用数学归纳法证明. 当 $m=1$ 时，$C_{k-r-1}^{1}=k-(r+1)=b(1,0)k-b(1,1)$，即当 $m=1$ 时结论成立，假设当 $m=s$ 时结论成立，则当 $m=s+1$ 时，

$$(s+1)!C_{k-r-1}^{s+1}=(k-r-s-1)s!C_{k-r-1}^{s}=(k-r-s-1)\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}b(s,j)k^{s-j}=$$
$$\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}b(s,j)k^{s+1-j}-(r+s+1)\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}b(s,j)k^{s-j}=\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}b(s,j)k^{s+1-j}+(r+s+1)\sum_{j=1}^{s+1}(-1)^{j}b(s,j-1)k^{s+1-j}=$$
$$k^{s+1}+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j}(b(s,j)+(r+s+1)b(s,j-1))k^{s+1-j}+(-1)^{s+1}(r+s+1)b(s,s)=$$
$$k^{s+1}+\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j}b(s+1,j)k^{s+1-j}+(-1)^{s+1}b(s+1,s+1)=\sum_{j=0}^{s+1}(-1)^{j}b(s+1,j)k^{s+1-j},$$

故当 $m=s+1$ 时成立，即对任意自然数 m，(8)式均成立.

3 等幂和与 Bernoulli 数的通解公式

定理 1(等幂和的通解公式) 当 $1\leqslant r\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant r$ 时，设

$$a_{j}=\frac{4^{j}}{j!}\sum_{m=j}^{r}\frac{(2-4^{m})B_{2m}C_{r+j-m}^{j}C_{2m-2j}^{m-j}C_{2r+1}^{2m-2j}}{C_{2m}^{m+j}C_{m+j}^{j}}, \tag{10}$$

则
$$A(k,r)=\frac{1}{(-4)^{r}}\sum_{j=1}^{r}\cdot(\sum_{m=j}^{r}\frac{(2-4^{m})B_{2m}C_{r+j-m}^{j}C_{2m-2j}^{m-j}C_{2r+1}^{2m-2j}}{C_{m+j}^{j}C_{2m}^{m+j}})4^{j}C_{r+j}^{j}C_{k}^{r+j}, \tag{11}$$

$$A(k,r)=(-\frac{1}{4})^{r}\sum_{j=1}^{r}a_{j}j!C_{r+j}^{j}C_{k}^{r+j}, \tag{12}$$

$$A(k,r)=\frac{(r+1)C_{k}^{r+1}}{(-4)^{r}}\sum_{j=0}^{r-1}a_{j+1}j!C_{k-r-1}^{j}, \tag{13}$$

$$A(k,r)=\frac{(r+1)C_{k}^{r+1}}{(-4)^{r}}\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s}\cdot\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j}a_{r-j+1}b(r-j,s-j)k^{r-s}, \tag{14}$$

$$S_{2k}(n)=\frac{M}{4k+2}(N^{k}+\sum_{r=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{r}a_{j}j!C_{r+j}^{j}\cdot C_{k}^{r+j})\frac{N^{k-r}}{4^{r}}), \tag{15}$$

$$S_{2k+1}(n)=\frac{N^{k+1}}{2k+2}+\sum_{r=1}^{k-1}(\sum_{j=1}^{r}a_{j}j!C_{r+j}^{j}C_{k}^{r+j})\frac{N^{k-r+1}}{2(k+1-r)4^{r}}. \tag{16}$$

证明 由(6)式有 $\sum_{m=1}^{r}(2-4^{m})B_{2m}C_{2r+1}^{2m}=-1$，故由(5)与(7)式有

$$A(k,r)=(-\frac{1}{4})^r(C_k^r+\sum_{m=1}^{r}(2-4^m)。$$

$$B_{2m}C_{k-m}^{r-m}C_{2k+1}^{2m})=(-\frac{1}{4})^r\sum_{m=1}^{r}(2-4^m)。$$

$$B_{2m}(C_{k-m}^{r-m}C_{2k+1}^{2m}-C_{2r+1}^{2m}C_k^r) \quad (17)$$

$$=(-\frac{1}{4})^r\sum_{m=1}^{r}(2-4^m)B_{2m}。$$

$$(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{4^{m-j}C_m^jC_{r+m-j}^{2m-j}C_{2j}^jC_{2r+1}^{2j}C_k^{r+m-j}}{C_r^jC_{2m}^j})=\frac{1}{(-4)^r}。$$

$$\sum_{j=1}^{r}(\sum_{m=j}^{r}\frac{(2-4^m)B_{2m}C_{r+j-m}^jC_{2m-2j}^{m-j}C_{2r+1}^{2m-2j}}{C_{m+j}^jC_{2m}^{m+j}})4^jC_{r+j}^jC_k^{r+j},$$

即得到(11)式,将(10)式代入(11)式即得到(12)式,将(8)式代入(12)式即得到(14)式,再将(11)式代入定理A即得到(15)与(16)式.

定理 **2**(**Bernoulli** 数的通解公式)　当 $k\geqslant 3$ 时,则有

$$B_{2k}=\frac{2}{(2k+1)4^k}\sum_{m=1}^{k-1}(2-4^m)B_{2m}(k-m)C_{2k}^{2m-1},(k\geqslant 2), \quad (18)$$

$$B_{2k}=\frac{1}{3(2k-1)(2k+1)4^{k-2}}\sum_{m=1}^{k-2}(4^m-2)B_{2m}(2k-m)C_{k-m}^2C_{2k}^{2m-1}, \quad (19)$$

$$B_{2k}=\frac{1}{3(2k+1)(4^k-2)}\sum_{m=0}^{k-2}(4^m-2)B_{2m}(k-m-1)(2k-2m+3)C_{2k+1}^{2m}, \quad (20)$$

$$B_{2k}=\frac{1}{2k(2k+1)(4^k-2)}\sum_{m=1}^{k-1}(2-4^m)B_{2m}(4k-2m+1)C_{2k}^{2m-1},(k\geqslant 2), \quad (21)$$

$$B_{2k}=\frac{1}{(2k-1)4^k-4k}\sum_{m=1}^{k-1}(2-4^m)B_{2m}C_{2k}^{2m-1},(k\geqslant 2), \quad (22)$$

$$B_{2k}=\frac{1}{2(2k+1)}\sum_{m=1}^{k-1}(2-4^m)B_{2m}[(2k-1)C_{2k-1}^{2m-1}-2C_{2k}^{2m-1}],(k\geqslant 2). \quad (23)$$

证明　由(1)式有

$$A(k,k-2)=3A(k,k-1)=(-1)^{k-1}6(2k+1)B_{2k},$$

当 $k\geqslant 3$ 时,由式(17)有

$$A(k,k-1)=(-\frac{1}{4})^{k-1}\sum_{m=1}^{k-1}(2-4^m)B_{2m}C_{k-m}^1C_{2k}^{2m-1},$$

$$A(k,k-2)=(-\frac{1}{4})^{k-2}\frac{2}{2k-1}\sum_{m=1}^{k-2}(2-4^m)B_{2m}(2k-m)C_{k-m}^2C_{2k}^{2m-1},$$

由此即得(18)式与(19)式.再由(6)式,(18)式及(19)式即得(20)(23)式.

利用(1)式,(9)式和(14)式可给出 $A(k,r)$ 的计算程序,从而可获得多个等幂和系数公式和等幂和公式.

参考文献

1 王云葵.关于 Bernoulli 数与 Bowen 猜想.广西科学,2000,7(1):1416.

2 王云葵.Bernoulli 数与素数的判别.广西科学,2000,7(3):180182.

3 王云葵,邓培民.关于伯努利数结构的讨论.广西师范大学学报,1996,14(4):15.

4 王云葵,马武瑜.Bernoulli 数与判别素数的充要条件.华侨大学学报,2000,21(3):234238.

5 陈景润,黎鉴愚.关于幂和公式的一般性质.数学研究与评论,1986,(1):4350.

6 陈景润,黎鉴愚.关于幂和问题的进一步研究.科学通报,1985,30(17):12811284.

7 陈景润,黎鉴愚.关于等幂和问题.科学通报,1985,30(4):316~317.

8 陈景润,黎鉴愚.在 $S_k(n)$ 上的新结果.科学通报,1986,31(6):2118.

9 王云葵,邓培民.等幂和的简单求法及其 *M-N* 表示法的计算.广西师大学报,1993,11(4):2731.

10 陈瑞卿.关于幂和问题的新结果.科学通报,1994,41(1):6669.

11 朱豫根,刘玉清.关于幂和公式系数的一个递推关系式.数学的实践与认识,2002,32(2):319.

12 王云葵.等幂和的简洁表示及循环积分法.西南民族学院学报,2001,27(1):18~23.

13 王云葵,曹敦虔.关于等幂和的计算程序.广西民族学院学报,2003,9(1):1~7.

(责任编辑:黎贞崇)