DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.01.001
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(1): 1~ 4

关于 232规则元胞自动机的 GOE*

On the GOE of Cellular Automata with Rule 232

邓 婷,易 忠,邓培民
Deng Ting, Yi Zhong, Deng Peimin

(广西师范大学数学与计算机科学学院,广西桂林 541004)
(Coll. of Math.& Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 介绍一维元胞自动机的一类特殊位形 GOE的概念,找出满足 3重局部变换规则-232规则的一维有限元胞自动机在固定边界条件下的所有 GOE,并得到周期边界条件下一个位形是 GOE的充分必要条件.

关键词: 元胞自动机 GOE 固定边界条件 周期边界条件
中图法分类号: O158; TP301.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0001-04

Abstract The definition of particular configurations-GOE was introduced, and all the Guardens-of-Eden of one-dimentional finite Cellular Automate with triplet local transition rule 232 and boundary conditions was found, and the sufficient and necessary condition on which a configuration on the cyclic boundary condition is a GOE were also found.

Key words cellular automata, guardens-of-eden, fixed boundary condition, cyclic boundary condition

元胞自动机(Cellular Automata,简称 CA)最早由 VonNeumann等人提出来,当初主要由于研究生命系统的自复制功能而引入[1].元胞自动机的研究涉及到很多领域. 1962年, Moore定义了一类特殊位形,即伊甸园(Guardens-of-Eden,简称 GOE),指出它们是一类位形,满足不存在前一时刻的位形可以通过全域变换函数演变而成[2].此后,许多学者对特定规则元胞自动机的 GOE存在性进行讨论.并得到在某些情况下元胞自动机 GOE存在充分或必要条件.[3]但是,对一满足特定规则的元胞自动机,如何找出其所有 GOE,并没有得到一个统一的方法.本文找出满足 3重局部变换规则-232规则的一维有限元胞自动机在固定边界条件下所有 GOE,以及在周期边界条件下一个位形是 GOE的充分必要条件.

1 基本定义

本文讨论的一维元胞自动机都是服从 3重局部变换规则,即是 3邻域的,且每个元胞的值都从 $F_2=\{0,1\}$中取值.通常把包含 m个元胞,满足规则 R和边界条件(T,U)的一维 CA记为 $CA\text{-}R_{T\text{-}U}(m)$.关于该类元胞自动机的概念及性质参见文献[4,5].

本文讨论的元胞自动机为 232规则,其 3重局部变换规则 f可表示为:

$$\begin{pmatrix} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然,规则 232可看作"少数服从多数"的规则,即当 xyz含有 2个或 2个以上的 1(或 0)时,$f(xyz)=1$(或 0).

对于 $CA\text{-}232_{T\text{-}U}(m)$的任意一个位形 $c=c_1c_2\cdots c_m$,本文约定用 c_0和 c_{m+1}分别表示边界 T和 U.

定义 1 设 d是 $CA\text{-}232_{T\text{-}U}(m)$的一个位形,W是其全域变换函数,如果存在一个位形 c使得 $d=W(c)$,则称位形 c是 d的一个前像.

定义 2 设 d是 $CA\text{-}232_{T\text{-}U}(m)$的一个位形,W是其全域变换函数,如果 d不存在前像,则称位形 d是 GOE.

定义 3 设 d是 $CA\text{-}232_{T\text{-}U}(m)$的一个位形,若存在 $c_0c_1\cdots c_{i+1}(0\leqslant i\leqslant m)$,不管 $d_{i+1}\cdots d_m$的取值如何都使得 $d_j=f(c_{j-1},c_j,c_{j+1})$,$(1\leqslant j\leqslant i)$,则称 $d_0d_1\cdots d_i$有前像 $c_0c_1\cdots c_i$.若存在 $c_{m-k-1}\cdots c_{m+1}(0\leqslant k\leqslant m-1)$,不管 $d_1\cdots d_{m-k-1}$的取值如何都使得 $d_j=f(c_{j-1},c_j,c_{j+1})$,$(m-k\leqslant j\leqslant m)$,则称 $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_{m+1}$有前像 $c_{m-k}c_{m-k+1}\cdots c_{m+1}$.若 $d_0d_1\cdots d_i$有前像 $c_0c_1\cdots c_i$,则称 $d_j(0\leqslant j\leqslant i)$有原像 c_j.若 $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_{m+1}$有前像 $c_{m-k}c_{m-k+1}\cdots c_{m+1}$则称

收稿日期: 2004-05-21
作者简介: 邓婷(1977-),女,湖南长沙人,硕士研究生,主要从事自动机理论的研究.
* 国家自然科学基金(10271021, 60075016)、广西自然科学基金(0135005)、教育部优秀青年教师资助计划(2002-40)和广西十百千人才基金资助项目.

$d_j\,(m-k\leqslant j\leqslant m+1)$ 有原像 c_j.

显然,定义 1—3中的前像都不一定是唯一的.本文得到以下结论.

设 d 是 $CA-232_{T-U}(m)$ 的一个位形,W是其全域变换函数,则 d 有前像当且仅当对任意 $0\leqslant i\leqslant m+1$, $d_0d_1\cdots d_i$ 有原像,当且仅当对任意 $0\leqslant k\leqslant m$, $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_{m+1}$ 有原像; d 没有原像当且仅当存在 $0\leqslant i\leqslant m-1$,使得 $d_0d_1\cdots d_i$ 有原像,且 $d_0d_1\cdots d_{i+1}$ 没有原像,当且仅当存在 $0\leqslant k\leqslant m-2$,使得 $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_{m+1}$ 有原像,且 $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_{m+1}$ 没有原像.

定义 4 设 d 是 $CA-232_{T-U}(m)$ 的一个位形,若 $d_1d_2\cdots d_i$ 有前像 $c_1c_2\cdots c_i$,且 c_i 只能为 1或者只能为 0,则称 d_i 有唯一左决定前像.若 $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_m$ 有前像 $c_{m-k}c_{m-k+1}\cdots c_m$,且 c_{m-k} 只能为 1或者只能为 0,则称 d_{m-k} 有唯一右决定前像.

由定义 4可知, d_i 有唯一左决定前像 c_i,是指 c_i 由 $d_0d_1\cdots d_i$ 唯一决定,而与 $d_{i+1}\cdots d_{m+1}$ 无关.同样, d_i 有唯一右决定前像 c_i,是指 c_i 由 $d_id_{i+1}\cdots d_{m+1}$ 唯一决定,而与 $d_0\cdots d_{i-1}$ 无关.

2 满足固定边界条件的 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的 GOE

定理 1 设 d 是 $CA-232_{T-U}(m)$ 的一个位形,则 d 为 GOE与以下各结论等价.

1) 存在 $0\leqslant i\leqslant m-1$, $(c_0=T, c_{m+1}=U)$,使得 $d_0d_1\cdots d_i$ 有前像 $c_0c_1\cdots c_i$,且 c_i 只能为 0, $d_{i+1}d_{i+2}=10$,或 c_i 只能为 1, $d_{i+1}d_{i+2}=01$;

2) 存在 $0\leqslant k\leqslant m-2$,使得 $d_{m-k}d_{m-k+1}\cdots d_{m+1}$ 有前像 $c_{m-k}c_{m-k+1}\cdots c_{m+1}$,且 c_{m-k} 只能为 0, $d_{m-k-2}d_{m-k-1}=01$,或 c_{m-k} 只能为 1, $d_{m-k-2}d_{m-k-1}=10$.

证明 ($\leftarrow$) 1)假设 d 不是 GOE且存在 $0\leqslant i\leqslant m-1$, $(c_0=T, c_{m+1}=U)$,使得 $d_0d_1\cdots d_i$ 有前像 $c_0c_1\cdots c_i$,当 $0\leqslant i\leqslant m-2$ 时,若 c_i 只能为 0, $d_{i+1}d_{i+2}=10$,则由 $d_{i+1}=1$ 得 $c_{i+1}c_{i+2}=11$,从而 $d_{i+2}=1$,矛盾.当 $i=m-1$ 时,由 $d_md_{m+1}=10$,知 $c_{m+1}=0$,由 $d_m=1$, $c_{m-1}=0$ 得 $c_{m+1}=1$,矛盾.若 c_i 只能为 1, $d_{i+1}d_{i+2}=01$,当 $0\leqslant i\leqslant m-2$ 时,由 $d_{i+1}=0$ 得 $c_{i+1}c_{i+2}=00$,从而 $d_{i+2}=0$,矛盾.当 $i=m-1$ 时,由 $d_md_{m+1}=01$,知 $c_{m+1}=1$,由 $d_m=0$, $c_{m-1}=1$ 得 $c_{m+1}=0$,矛盾.从而假设不成立,故 d 是 GOE.

2) 类似 1) 可证.

($\rightarrow$) 若 d 为 GOE,则 d 没有原像,从而存在 2种情形:

(Ⅰ) $0\leqslant i\leqslant m-1$,使得 $d_0d_1\cdots d_id_{i+1}$ 有原像 $c_0c_1\cdots c_ic_{i+1}$,且 $d_0d_1\cdots d_{i+2}$ 没有原像,此时只可能有 2种情况: (i) c_ic_{i+1} 只可能为 10且 $d_{i+1}d_{i+2}=01$,或者 (ii) c_ic_{i+1} 只可能为 01且 $d_{i+1}d_{i+2}=10$;

(Ⅱ) 存在 $0\leqslant k\leqslant m-2$,使得 $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m$ 有原像 $c_{m-k-1}c_{m-k}\cdots c_m$,且 $d_{m-k-2}d_{m-k-1}\cdots d_m$ 没有原像,此时只可能有 2种情况: (i) $c_{m-k-1}c_{m-k}$ 只可能为 01且 $d_{m-k-2}d_{m-k-1}=10$,或者 (ii) $c_{m-k-1}c_{m-k}$ 只可能为 10且 $d_{m-k-2}d_{m-k-1}=01$.

由定理 1显然有以下推论:

推论 1 设 d 是位形,

1) 对于 $CA-232_{0-1}(m)$,若 $d_1d_2=10$ 或 $d_{m-1}d_m=10$,则 d 是 GOE;

2) 对于 $CA-232_{0-0}(m)$,若 $d_1d_2=10$ 或 $d_{m-1}d_m=01$,则 d 是 GOE;

3) 对于 $CA-232_{1-0}(m)$,若 $d_1d_2=01$ 或 $d_{m-1}d_m=01$,则 d 是 GOE;

4) 对于 $CA-232_{1-1}(m)$,若 $d_1d_2=01$ 或 $d_{m-1}d_m=10$,则 d 是 GOE.

由 232规则决定的 3重局部变化规则可得:

引理 1 设 d 是位形,

1) 对于 $CA-232_{0-1}(m)$,若 $d_1d_2=11$,则 d_1d_2 有唯一左决定前像 $c_1c_2=11$;若 $d_{m-1}d_m=00$,则 $d_{m-1}d_m$ 有唯一右决定前像 $c_{m-1}c_m=00$.

2) 对于 $CA-232_{0-0}(m)$,若 $d_1d_2=11$,则 d_1d_2 有唯一左决定前像 $c_1c_2=11$;若 $d_{m-1}d_m=11$,则 $d_{m-1}d_m$ 有唯一右决定前像 $c_{m-1}c_m=11$.

3) 对于 $CA-232_{1-0}(m)$,若 $d_1d_2=00$,则 d_1d_2 有唯一左决定前像 $c_1c_2=00$;若 $d_{m-1}d_m=11$,则 $d_{m-1}d_m$ 有唯一右决定前像 $c_{m-1}c_m=11$.

4) 对于 $CA-232_{1-1}(m)$,若 $d_1d_2=00$,则 d_1d_2 有唯一左决定前像 $c_1c_2=00$;若 $d_{m-1}d_m=00$,则 $d_{m-1}d_m$ 有唯一右决定前像 $c_{m-1}c_m=00$.

引理 2 设 d 是位形,

1) 对于 $CA-232_{0-1}(m)$, $d_1d_2\cdots d_{k+2}=0^k10\,(k\geqslant 1)$ 或 $0^k11\,(k\geqslant 0)$ 有前像,且 c_{k+2} 只能为 1; $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=101^k\,(k\geqslant 1)$,或 $001^k\,(k\geqslant 0)$ 有前像,且 c_{m-k-1} 只能为 0.

2) 对于 $CA-232_{0-0}(m)$, $d_1d_2\cdots d_{k+2}=0^k10\,(k\geqslant 1)$ 或 $0^k11\,(k\geqslant 0)$ 有前像,且 c_{k+2} 只能为 1; $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=010^k\,(k\geqslant 1)$,或 $110^k\,(k\geqslant 0)$ 有前像,且 c_{m-k-1} 只能为 1.

3) 对于 $CA-232_{1-0}(m)$, $d_1d_2\cdots d_{k+2}=1^k00\,(k\geqslant 0)$ 或 $1^k01\,(k\geqslant 1)$ 有前像,且 c_{k+2} 只能为 0; $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=010^k\,(k\geqslant 1)$,或 $110^k\,(k\geqslant 0)$ 有前

像,且 c_{m-k-1} 只能为 1.

4) 对于 $CA-232_{1-1}(m)$, $d_1d_2\cdots d_{k+2}=1^k00(k\geqslant 0)$ 或 $1^k01(k\geqslant 1)$ 有前像,且 c_{k+2} 只能为 0; $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=001^k(k\geqslant 0)$,或 $101^k(k\geqslant 1)$ 有前像,且 c_{m-k-1} 只能为 0.

这里只给出 1) 的证明, 2), 3), 4) 类似 1) 可证.

证明　显然 $d_1d_2\cdots d_{k+2}=0^k10$ 有前像 $c_1c_2\cdots c_{k+2}=0^{k-1}101$,由定理 1 中的 1) 知, c_k 只能为 1,又由 $d_k=0$ 知 $c_{k+1}=0$, 又由 $d_{k+1}=1$ 得 $c_{k+2}=1$. 对于 $d_1d_2\cdots d_{k+2}=0^k11$,当 $k=0$,有 $c_{k+1}c_{k+2}=11$; $k=1$ 时,有 $c_kc_{k+1}c_{k+2}=101$ 或 011; 当 $k>1$ 时,显然有前像 $c_1c_2\cdots c_{k+2}=0^k11$,由定理 1 中的 1) 知 $c_{k-1}=0$,则 $c_kc_{k+1}c_{k+2}=101$ 或 011, 从而, $c_{k+2}=1$. 显然 $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=101^k$ 有前像 $c_{m-k-1}c_{m-k}\cdots c_m=0101^{k-1}$. 由定理 1 中的 2) 知 $c_{m-k+1}=0$,由 $d_{m-k+1}=1$ 得 $c_{m-k}=1$,又由 $d_{m-k}=0$ 得 $c_{m-k-1}=0$. 对于 $d_{m-k-1}d_{m-k}\cdots d_m=001^k$,当 $k=0$ 时,有 $d_{m-k-1}d_{m-k}=00$; $k=1$ 时,有 $c_{m-k-1}c_{m-k}c_{m-k+1}=010$ 或 001; $k>1$ 时,显然有前像 $c_{m-k-1}c_{m-k}\cdots c_m=001^k$. 由定理 1 中的 2) 知 $c_{m-k+2}=1$,则 $c_{m-k-1}c_{m-k}c_{m-k+1}=010$ 或 001 从而 $c_{m-k-1}=0$.

很容易可以把引理 2 扩充到一般的情形.

引理 3　设 d 是 $CA-232_{l-u}(m)$ 的一个位形, $a,b\in\{0,1\}$,且 $a\neq b$.

1) 若 $d_1d_2\cdots d_i$ 有前像 $c_1c_2\cdots c_i$,且 c_i 只能为 a,若 $d_{i+1}\cdots d_{i+k+2}=a^kba(k\geqslant 1)$ 或 $a^kbb(k\geqslant 0)$,则 $d_1d_2\cdots d_{i+k+2}$ 有前像 $c_1c_2\cdots c_{i+k+2}$,且 c_{i+k+2} 只能为 b.

2) 若 $d_{m-i+1}d_{m-i+2}\cdots d_m$ 有前像 $c_{m-i+1}c_{m-i+2}\cdots c_m$,且 c_{m-i+1} 只能为 a,若 $d_{m-i-k-1}d_{m-i-k}\cdots d_{m-i}=aba^k(k\geqslant 1)$ 或 $bba^k(k\geqslant 0)$,则 $d_{m-i-k-1}d_{m-i-k}\cdots d_m$ 有前像 $c_{m-i-k-1}c_{m-i-k}\cdots c_m$ 且 $c_{m-i-k-1}$ 只能为 b.

由引理 3 很容易可以得到以下结论.

引理 4　设 d 是 $CA-232_{l-u}(m)$ 的一个位形, $a,b\in\{0,1\}$,且 $a\neq b$.

1) 若 d_i 有唯一左决定前像 $c_i=a$, $d_j(j>i)$ 紧接着 d_i 有唯一左决定前像 c_j,则

(Ⅰ) $c_j=a$ 当且仅当 $j=i+1$, $d_id_{i+1}=aa$,且 d_{i-1} 有唯一左决定前像 b.

(Ⅱ) $c_j=b$ 当且仅当

(i) $d_{i+1}\cdots d_j=a^kba(k\geqslant 1$,且 $2k+2=j-i)$,或者

(ii) $d_{i+1}\cdots d_j=a^kbb(k\geqslant 1$,且 $2k+2=j-i)$,或者

(iii) $j=i+1$, $d_j=b$,此时,若 d_{j+1} 有唯一左决定前前像,则 d_{j+1} 只能是 b,且 d_{j+1} 的唯一左决定前像为 $c_{j+1}=b$,

2) 若 d_{m-k} 有唯一右决定前像 $c_{m-k}=a$, $d_j(j<m-k)$ 紧接着 d_{m-k} 有唯一右决定前像 c_{m-k},则

(Ⅰ) $c_j=a$ 当且仅当 $j=m-k-1$, $d_{m-k-1}d_{m-k}=aa$,且 d_{m-k+1} 有唯一右决定前像 b.

(Ⅱ) $c_j=b$ 当且仅当

(i) $d_j\cdots d_{m-k-1}=aba^k(k\geqslant 1$,且 $2k+2=m-k-j)$,

(ii) $d_j\cdots d_{m-k-1}=bba^k(k\geqslant 1$,且 $2k+2=m-k-j)$,

(iii) $j=m-k-1$, $d_j=b$,此时,若 d_{m-k-2} 有唯一右决定前像,则 d_{m-k-2} 只能是 b,且 d_{m-k-2} 的唯一右决定前像为 $c_{m-k-2}=b$.

根据定理 1, 引理 3 与引理 4, 即可找出 $CA-232_{l-u}(m)$ 的所有 GOE.

定理 2　设 d 是位形, $A_0=\{0^k10,0^k11|k\geqslant 0\}$, $A_1=\{1^k01,1^k00|k\geqslant 0\}$, $B_0=\{010^k,110^k|k\geqslant 0\}$, $B_1=\{101^k,001^k|k\geqslant 0\}$,

1) $CA-232_{0-1}(m)$ 的 GOE 只包括 2 种形式: 若 $d_1d_2\cdots d_i=\nu_1\nu_2\cdots\nu_t$,其中 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_t$ 交替取自 A_0 与 A_1 中的子序列,则当 $\nu_t\in A_0$ 且 $\nu_t=10$ 或 $\nu_t\in A_1$ 且 $\nu_t=01$ 时, d 是 GOE; 若 $d_{m-j}d_{m-j+1}\cdots d_m=\kappa_s\kappa_{s-1}\cdots\kappa_1$,其中 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ 交替取自 B_1 与 B_0 中的子序列,则当 $\kappa_s\in B_0$ 且 $\kappa_s=01$ 或 $\kappa_s\in B_1$ 且 $\kappa_s=10$ 时, d 是 GOE.

2) $CA-232_{0-0}(m)$ 的 GOE 只包括 2 种形式: 若 $d_1d_2\cdots d_i=\nu_1\nu_2\cdots\nu_t$,其中 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_t$ 交替取自 A_0 与 A_1 中的子序列,则当 $\nu_t\in A_0$ 且 $\nu_t=10$ 或 $\nu_t\in A_1$ 且 $\nu_t=01$ 时, d 是 GOE; 若 $d_{m-j}d_{m-j+1}\cdots d_m=\kappa_s\kappa_{s-1}\cdots\kappa_1$,其中 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ 交替取自 B_0 与 B_1 中的子序列,则当 $\kappa_s\in B_0$ 且 $\kappa_s=01$ 或 $\kappa_s\in B_1$ 且 $\kappa_s=10$ 时, d 是 GOE.

3) $CA-232_{1-0}(m)$ 的 GOE 只包括 2 种形式: 若 $d_1d_2\cdots d_i=\nu_1\nu_2\cdots\nu_t$,其中 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_t$ 交替取自 A_1 与 A_0 中的子序列,则当 $\nu_t\in A_0$ 且 $\nu_t=10$ 或 $\nu_t\in A_1$ 且 $\nu_t=01$ 时, d 是 GOE; 若 $d_{m-j}d_{m-j+1}\cdots d_m=\kappa_s\kappa_{s-1}\cdots\kappa_1$,其中 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ 交替取自 B_0 与 B_1 中的子序列,则当 $\kappa_s\in B_0$ 且 $\kappa_s=01$ 或 $\kappa_s\in B_1$ 且 $\kappa_s=10$ 时, d 是 GOE.

4) $CA-232_{1-1}(m)$ 的 GOE 只包括 2 种形式: 若 $d_1d_2\cdots d_i=\nu_1\nu_2\cdots\nu_t$,其中 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_t$ 交替取自 A_1 与 A_0 中的子序列,则当 $\nu_t\in A_0$ 且 $\nu_t=10$ 或 $\nu_t\in A_1$ 且 $\nu_t=01$ 时, d 是 GOE; 若 $d_{m-j}d_{m-j+1}\cdots d_m=\kappa_s\kappa_{s-1}\cdots\kappa_1$,其中 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_s$ 交替取自 B_1 与 B_0 中的子序列,则当 $\kappa_s\in B_0$ 且 $\kappa_s=01$ 或 $\kappa_s\in B_1$ 且 $\kappa_s=10$

时,d是 GOE.

定理 2不仅给出 CA-$232_{\alpha-\beta}(m)$ 在固定边界条件下的所有 GOE,而且还给出判断 1个位形 d是否是 GOE的方法.

例 1 设 d是 CA-$232_{0-1}(20)$的一个位形,判断其是否为 GOE.

解 1) 设 d = 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1,把 d从左至右按定理 2进行划分得

0 1 0 ⋯0 1 ⋯1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1
V_1 ⋯ V_2 ⋯

其中,V_1 = 010∈ A_0,V_2 = 01∈ A_1,由定理 2知,d是 GOE.

2) 设 d = 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1,把 d从左至右按定理 2进行划分得

0 1 0 ⋯0 0 ⋯1 1 ⋯1 1 0 1 ⋯0 1 1 ⋯1 0 0 ⋯0 1 1
V_1 ⋯ V_2 ⋯ V_3 ⋯ V_4 ⋯ V_5 ⋯ V_6 ⋯ V_7

其中,V_1,V_3,V_5,V_7∈ A_0,V_4,V_6∈ A_1,且不满足定理 2的条件,故 d不是 GOE,显然,位形 c = 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1是 d的一个前像.

3) 设 d = 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1,把 d从左至右按定理 2进行划分得

0 1 0 ⋯0 0 ⋯1 1 ⋯1 1 0 1 ⋯1 0 ⋯1 1 0 0 0 1 1
V_1 ⋯ V_2 ⋯ V_3 ⋯ V_4 ⋯ V_5 ⋯

其中,V_1,V_3,V_5∈ A_0,V_2,V_4∈ A_1,且 V_5 = 10,由定理 2知 d是 GOE.

上面几例中,同样可以把位形 d从右向左划分,结果一样.

3 满足周期边界条件的 CA-$232_{\alpha-\beta}(m)$的 GOE

CA-$232_{\alpha-\beta}(m)$ 在周期边界条件下的 GOE可转化到固定边界条件下解决.

定理 3 设 d是 CA-$232_{\alpha-\beta}(m)$的一个位形,且 $d_1 \neq d_m$.设 $d_1 = a$,$d_m = b$,则 d_1,d_m分别只有唯一左决定、右决定前像 $c_1 = a$,$c_n = b$或者 $c_1 = b$,$c_n = a$,故 d为 GOE当且仅当

1) d为 CA-$232_{a-b}(m)$ 的 GOE,其中,d_1d_2的唯一左决定前像为 ba,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 ba,且

2) d为 CA-$232_{b-a}(m)$ 的 GOE,其中,d_1d_2的唯一左决定前像为 aa,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 bb.

证明 只对 $d_1 = 1$,$d_m = 0$的情形进行证明.

设 $d_1 = 1$,$d_m = 0$,由周期边界条件下 232规则的作用,d_1d_2,$d_{m-1}d_m$只有唯一左决定、右决定原像 $c_1c_2 = 01$,$c_{n-1}c_n = 01$,或者 $c_1c_2 = 11$,$c_{n-1}c_n = 00$.故 d为 GOE当且仅当 d为 CA-$232_{0-1}(m)$的 GOE,其中,d_1d_2的唯一左决定前像为 01,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 01,而且 d为 CA-$232_{0-1}(m)$的 GOE,其中,d_1d_2的唯一左决定前像为 11,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 00.

定理 4 设 d是 CA-$232_{\alpha-\beta}(m)$的一个位形,a,b∈ {0,1},$a \neq b$,且 $d_1 = d_m = a$,则 $d_1 = d_m$分别只有唯一左决定、右决定前像 $c_1 = a$,$c_m = b$或者 $c_1 = b$,$c_m = a$或者 $c_1 = a$,$c_m = a$.故,d为 GOE当且仅当

1) d为 CA-$232_{a-b}(m)$的 GOE,其中 d_1d_2的唯一左决定前像为 ba,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 aa,且

2) d为 CA-$232_{b-a}(m)$的 GOE,其中 d_1d_2的唯一左决定前像为 aa,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 ab,且

3) d为 CA-$232_{a-a}(m)$的 GOE,其中 d_1的唯一左决定前像为 a,d_m的唯一右决定前像为 a.

证明 只对 $d_1 = 1$,$d_m = 1$的情形进行证明.

设 $d_1 = 1$,$d_m = 1$,由周期边界条件下 232规则的作用,d_1d_2,$d_{m-1}d_m$分别只有唯一左决定、右决定原像 $c_1c_2 = 01$,$c_{n-1}c_n = 11$,或者 $c_1c_2 = 11$,$c_{n-1}c_n = 10$或者 d_1,d_m有唯一左决定、右决定原像 $c_1 = 1$,$c_n = 1$,故有 d为 GOE当且仅当

1) d为 CA-$232_{1-0}(m)$的 GOE,其中 d_1d_2的唯一左决定前像为 01,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 11,且

2) d为 CA-$232_{0-1}(m)$的 GOE,其中 d_1d_2的唯一左决定前像为 11,$d_{m-1}d_m$的唯一右决定前像为 10,且

3) d为 CA-$232_{1-1}(m)$的 GOE,其中 d_1的唯一左决定前像为 1,d_m的唯一右决定前像为 1.

参考文献:

[1] Wolfram S. Theory and Application of Cellular Automata[M]. Singapore: World Scientific, 1986.

[2] Moore E F. Machine models of self-reproducton[J]. Proc Symp Apps Math, 1962, (14): 17-33.

[3] 梅国平.串行细胞机无 Gardens-of-Eden的充要条件[J].科学通报, 1999, 44(2): 149-152.

[4] Inokuchi S. On behaviors of cellular automata with rule 156[J]. Bulletin of Informations and Cybernetics, 1998, 30(1): 121-131.

[5] Inokuchi S. On Behaviors of Cellular Automata with Rule 14 and 142[EB/OL]. http://citeseer.nj.nec.com/51143.html.

[6] Sato T. On Behaviors of Cellular Automata with Rule 27[J]. Kyushu J Math, 1996, 50: 133-152.

[7] Martin B. A Group Interpretation of Particles Generated by One-Dimensional Cellular Automaton, Wolfram's Rule 54[J]. International Journal of Modern Physics C, 2000, 11(1): 101-123.

(责任编辑:黎贞崇)