DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(1): 14~ 17

解整数规划问题的目标收敛法

Object Convergence Approach for Solving of Integer Programming Problems

朱承学[1],李 崧[2],肖鸣宇[3]
Zhu Chengxue[1], Li Song[2], Xiao Mingyu[3]

(1. 中南大学信息科学与工程学院,湖南长沙 410083; 2. 北海鑫诚建设监理有限责任公司,广西北海 536000; 3. 中南大学数学与计算技术学院,湖南长沙 410083)
(1. Coll. of Info. Sci.& Engi., Central South Univ., Changsha, Hunan, 410083, China; 2. Beihai Xincheng Project Management Co. LTD, Beihai, Guangxi, 536000, China; 3. Coll. of Math.& Comp. Tech., Central South Univ., Changsha, Hunan, 410083, China)

摘要: 提出基于目标收敛法的整数规划求解方法.该求解方法从整系数目标函数值一定为整数这一性质出发,对目标函数值进行逐步约束,使得每一步迭代均在上一步问题的可行域中割去一块不包含原规划问题整数可行解的区域,从而使可行域逐步缩小最终得到整数最优解.目标收敛法还可与割平面法、分枝估界等方法结合起来使用,从而加速求解过程.

关键词: 线性规划 整数规划 目标收敛法
中图法分类号: O221.1; O221.4 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0014-04

Abstract A new method for solving integer programming, Object Convergence Approach, is presented. Based on the feature that the value of the objective function must be integral if the coefficients of the objective function are all integral, the method constrains the value of the objective function step by step. In each step, a region, not containing feasible integral points of the original programming, is cut from the feasible region, which diminishes gradually until the optimal point is obtained. Also, the method can be combined well with branch and bound method and cutting plane approach to accelerate the solving process.

Key words linear programming, integer programming, object convergence approach

在现实生活、工业应用中,线性系统模型是最为常见的数学模型之一,而解决线性系统模型最为成熟、广泛的理论和方法是线性规划.在与现实相结合时,某些线性问题则需加上整数变量的约束,如:人员指派、零件个数、航空港管制等.这类整数规划问题不是在原规划问题上求解后再取整那么简单,仅仅用单纯形法来求解或许只是徒劳.目前最常用的整数规划求解方法是 R. E. Gomory 1958年提出的割平面法和 20世纪 60年代初 Land Doig和 Dakin提出的分枝定界法[1,2].但是 2种方法在某些问题下会出现收敛非常慢的情况.

最近整数规划在一些电子和计算机问题处理中发挥出了较好的优势[3,4],为提高问题解决的效率,再次激发了对整数规划理论的进一步研究[5].本文提出目标收敛法的思想,与一般整数规划问题不同的是,它不是从约束条件下手,而是通过约束原问题目标值的取值范围去逼近整数解,这样在很多问题上解的收敛速度会有大大提高.更重要的是,目标收敛法不与传统的整数规划问题冲突,它可以和经典的割平面法、分枝定界法完好地结合起到加速作用.在算法实现上也只需要在原有程序上稍加修改即可.

本文将以目标函数、约束条件中所有常量都为整数的纯整数规划问题作讨论,其标准形式为:

$$\text{Max} \quad z = CX,$$
$$\text{s.t.} \quad AX = B,$$

其中,$X \geqslant 0$, X为整数向量; C、B为整数向量; A为整数矩阵.

对于不是所有常量都为整数的情况,可以通过把它化为整系数标准形(所有常量为整数):把问题先化为线性规划标准形式,然后再将其系数不全为整数的条件或目标函数式分别乘以一个适当的整数使系数整数化,如:

收稿日期: 2004-07-27
修回日期: 2004-12-22
作者简介: 朱承学(1972-),男,湖南临湘人,讲师,主要从事计算机应用技术、计算机辅助几何设计、系统工程研究.

$\mathrm{Max}\quad z = x_1 + \frac{2}{3}x_2$,两边乘上 3, $\mathrm{Max}\quad z' = 3z = 3x_1 + 2x_2$,

s. t. $x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 7$,两边乘上 2, s. t. $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14$,

$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$, $2x_1 + x_2 + x_4 = 9$,

其中, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$,整数, $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$,

整数标准形式——→整系数标准形式.

为提高目标收敛法的收敛速度,本文不但要将它整数化,还要将它最小整系数化.另外,对于文中未给出定义的有关规划方面的术语均参照文献 [2, 6]的定义,本文部分计算实例来自这两篇文献.

1 目标收敛法

本文把欲求解的整数规划问题中暂不考虑变量为整数要求的优化问题称之为原问题的松弛问题.

若求解整系数标准化后的松弛问题得到 z' 的最大值 z_0,且 z_0 为一个非整数,这时再考虑变量为整数的要求,由于目标函数式右边为整数组合,一定为整数,故 z' 也只能为整数.这样 z' 的最优整数解不可能取到 z_0,最多只能取到 $[z_0]$($[x]$表示不大于 x 的最大整数).若在 $z' = [z_0]$上没有整数解,则 z' 只能为 $[z_0] - 1$或更小的整数.这就是本文提出的目标收敛法的主体思想.

由此归纳出目标收敛法的基本步骤:

步骤 1 将问题整系数标准化;

步骤 2 对原问题的松弛问题进行求解,若得到符合要求的整数解,这时也一定有目标值为 z_0 整数,则原问题解决,停止;否则进入步骤 3;

步骤 3 添加一约束条件,分如下 2种情况:

(Ⅰ) 加上约束条件 $z' \leqslant m$, $[z_0] \geqslant m \in \boldsymbol{Z}$, z_0为上一步求得的最优解.然后可结合割平面法或分枝估界等其他方法的约束再对新问题求解.求解中满足下列情况之一则停止,否则再进行步骤 3;

1) 求得最优解为整数解,则为原问题的解,停止.

2) 问题根本无解,则原问题也无解,停止.(如果是和分枝估界法结合使用,则指的是这个分枝上原问题无解).

(Ⅱ) 加上约束条件 $z' = m$, $[z_0] \geqslant m \in \boldsymbol{Z}$, z_0为上一步求得的最优解,并且能保证在 $z' > m$下无整数解.在此约束下:

1) 可行域内有整数点,则此次点为原问题的解,停止.

2) 可行域为空集,则原问题无解,停止.

3) 可行域不为空,但也无整数可行点,则再进行步骤 3.

本文把(Ⅱ)中这种目标收敛法称为目标定值探进法,目标定值探进法在后文中有较详细的讨论.

2 目标收敛与分枝估界法结合解的实例

这里给出(Ⅰ)目标收敛法结合分枝估界法解一个实例问题.

例 1 求纯整数线性规划:

$\mathrm{Max}\quad z = x_1 + \frac{2}{3}x_2$,

s. t. $x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leqslant 7$,

$2x_1 + x_2 \leqslant 9$, $x_1, x_2 \geqslant 0$,整数.

解 整系数标准化后的松弛问题 (P_0)如下:

$(P_0)\quad \mathrm{Max}\quad z' = 3z = 3x_1 + 2x_2$,

s. t. $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14$,

$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$.

记此松弛问题(P_0)的可行域为 D_0.用单纯形法对(P_0)求解,求得:

$X^{(0)} = (\frac{13}{4}, \frac{5}{2})$;

$z'_0 = \frac{59}{4} = 14.75$.

由(Ⅰ)目标收敛思想并取 $m = [z_0]$可得约束条件: $z' \leqslant 14$,即 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 14$.

又由分枝估界法的思想: $X^{(0)}$ 中 $x_1 = \frac{13}{4}$,将 D_0分解为 2个子集.分解引入 2个约束: $x_1 \geqslant 4$和 $x_1 \leqslant 3$得子问题(P_1)、(P_2):

子问题(P_1):

$\mathrm{Max}\quad z' = 3x_1 + 2x_2$,

s. t. $X \in D_0$,

$3x_1 + 2x_2 \leqslant 14$,

$x_1 \geqslant 4$.

子问题(P_2):

$\mathrm{Max}\quad z' = 3x_1 + 2x_2$,

s. t. $X \in D_0$,

$3x_1 + 2x_2 \leqslant 14$,

$x_1 \leqslant 3$.

(P_1)最优解 $X^{(1)}$和最优值 z'为:

$X^{(1)} = (4, 1)$, $z'_1 = 14$.

(P_2)最优解 $X^{(2)}$和最优值 z'为:

$X^{(2)} = (3, \frac{5}{2})$, $z'_2 = 14$.

事实上, (P_1)的解已满足要求,可以停止计算, (P_2)也不必计算.原问题的解为:

$X = (4, 1)$, $z = \frac{1}{3}z' = \frac{14}{3}$.

此问题若只用分枝估解法求解，得 (P_2) 的解为：

$X^{(2)} = (3, \frac{8}{3}), z'_2 = 14.33$.

这样它还将继续引入 2个约束：$x_2 \geqslant 3$ 和 $x_2 \leqslant 2$，将 (P_2) 分解为 (P_3)、(P_4) 2个子问题．其分枝关系如图 1所示．分枝估界法共需进行 5次计算，而目标收敛+分枝估界则只需 2～3次即可．图 2给出了 2种解法的可行域分割比较．

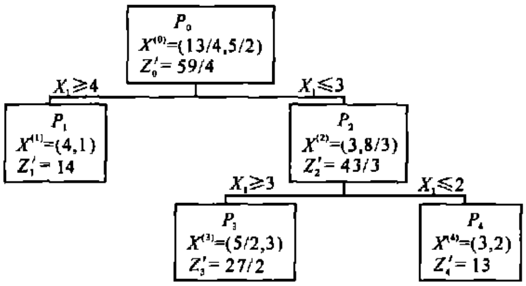
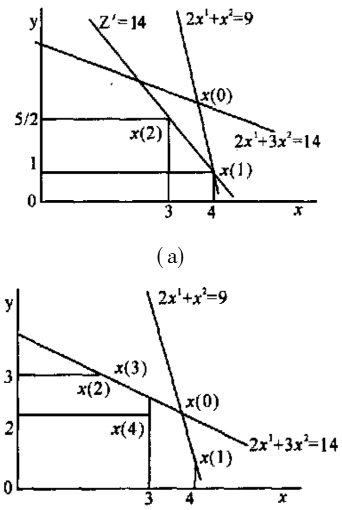


图 1 分枝估解法求解的分枝关系

Fig. 1 The solved branch relation by branch and bound method

目标收敛+分枝估界法在每次规划计算中都要多加一个约束条件，但这个约束的变量系数与目标的变量系数一样，也就是说在单纯形表计算中有两行几乎一样，这样在单纯形计算中并不会带来很大的计算量．由此可见，目标收敛法在一定程度上可起加速作用．



(a)

(b)

图 2 可行域比较

Fig. 2 The comparision of feasible region

(a)目标收敛+分枝估界；(b)分枝估界法

(a) Object convergence approach+branch and bound, (b) Branch and bound method

3 目标函数式的最小整系数化

有时松弛问题（或者上一步计算）的解并不满足整数要求，但目标值却为整数．很显然这种情况下，下一步计算中 m 的取值很难确定（特别是在 (I) 方法中，取 $m = [z_0]$ 则是无用约束，取 $m < [z_0]$，又很难保证在 $z' > m$ 下无整数解）．为了确保在目标收敛法中 m 直接取值 $[z_0]$（或在 (II) 方法中 $z' = m = [z_0] - 1$）能起到较理想的效果，这里提出在整系数标准化的同时对目标函数式最小整系数化，也就是使得目标函数式右边各变量的系数最大公约数为 1．

例 2 求纯整数线性规划

$\text{Max} \quad z = 40x_1 + 90x_2$,

s. t. $9x_1 + 7x_2 + x_3 = 56$,

$7x_1 + 20x_2 + x_4 = 70$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$,

x_1, x_2 整数．

解 直接对它用分枝估解法来求解，则可得：

(P_0) 的解为：$X = (4.81, 1.82), z = 356$;

(P_1) 的解为：$X = (5, 1.57), z = 341$;

(P_2) 的解为：$X = (4, 2.1), z = 349$;

……

一共进行 7次计算，直到得出最优整数解，其目标值均为整数．这样，计算中目标收敛法很难起到好的作用．但如果把目标值最小整系数化为：

$$z' = \frac{z}{10} = 4x_1 + 9x_2,$$

这样求解可得：$z'_0 = 35.6$，然后取 $z' \leqslant 35$．

由此求解得：$z'_1 = 34.1, z'_2 = 34.9$，然后取 $z' \leqslant 34$．由这一步（即第 4步）计算就可以得到 $X = (4, 2), z = 10 \times z' = 340$ 的最优整数解．

另外，目标值最小整系数化对 (II) 的目标定值探进法的加速意义也是明显的．

4 目标定值探进法

事实上很多整数规划问题的最优解（目标值）与它的松弛问题的最优解相差不会太大，或者说当目标值小于某个定值时即使有整数解其意义也不会很大．在这种情况下，如果逐步取可能存在整数解的目标值去试探是否存在整数解，可能很快得到结果．

在取定一个目标值之后，求满足所有约束条件的整数解有很多方法，可展开较详细的讨论，这里仅仅给出一种思想．

取定一个目标值相当于把可行域限制到一个超平面上，这个超平面与原规划问题的可行域相截，截得的一个平面凸区域就是这个目标值下的可行域．只要求解这个平面凸区域内（包含边上）是否有整数点即可．把这个平面图形的所有顶点（即加目标值约束后所有可行基）求出来，根据凸图形性质去判断是否有整点．

例 3 求纯整数线性规划

$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 5x_2$,

s. t. $-5x_1 + x_2 \geqslant 0$,

$-x_2 \geqslant -3$,

$x_1, x_2 \geqslant 0$,整数.

解 用单纯形法求解.

$X^{(10)} = (0.6, 3), z_0 = 16.8$.

根据定值探进法,取 $z = 16$,即 $3x_1 + 5x_2 = 16$,得条件(1):

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ -x_2 \geqslant -3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 16, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

而条件(1)下的可行域为$(\frac{1}{3}, 3)$、$(\frac{4}{7}, \frac{20}{7})$两点间线段,没有整数点,从而再取 $z = 15$,得条件(2):

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ -x_2 \geqslant -3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 15, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

条件(2)下的可行域为$(0, 3)$、$(\frac{15}{28}, \frac{75}{28})$两点间线段,有一个整数点,停止计算.这时最优整数解为:$X = (0, 3), z = 15$.

例 3中从松弛问题的最优值 16.8到 15共进行 2步定值探进.第一步定值为 16,第二步定值为 15.如果把第一步定值为 15,则可直接得出条件(2)下的 2个可行基$(0, 3)$、$(\frac{15}{28}, \frac{75}{28})$.这 2个基点与上一步(即第 0步松弛问题)所得的点$(0.6, 3)$三点构成的凸包内只有$(0, 3)$一个整数点,这样也可以得出最优解.但这种做法可能会造成漏解,比如说第一步定值为 14,则:

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ -x_2 \geqslant -3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 14, \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

条件(3)得出两可行基为$(0, \frac{14}{5})$、$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.而$(0, \frac{14}{5})$、$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$、$(0.6, 3)$三点构成的凸包内就不包含$(0, 3)$这个点.尽管如此,但这探进的步长还是可以做到自己控制来加速.

5 对混合整数线性规划的处理

对混合整数线性规划也还是先最小整系数标准化,然后将目标函数式化为左边为 z 和非整数变量,以及等式右边则全为整数变量的形式,即:

$$z + \sum_{i=1}^{k} a_{l_i} x_{l_i} = \sum_{j=k+1}^{n} a_{l_j} x_{l_j} \triangleq u,$$

其中,$l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,x_{l_j} $(j = k+1, k+2, \cdots, n)$为整数,$x_{l_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$无整数要求.

这样可知 u 一定为整数.若松弛问题所求得的解代入上式得 u_0 不为整数的话,则按分枝估解法的思想分别引入 2个约束 $u \geqslant [u_0] + 1$ 和 $u \leqslant [u_0]$,然后再对 2个子问题分别对 u 进行目标收敛即可.

6 结束语

由目标收敛法的思想可以看出,(I)方法无外乎在逐步求解中添加一些(约束目标值)条件,这些条件可能将问题的可行域多割去一块.只要保证这多割去的一块不可能存在满足条件的整数解即可.而(II)目标定值探进法则从最优解的角度出发在保证不漏解的情况下逐步把可行域分成小可行域,再检查该可行域内是否有可行解.由线性规划的可行域为凸集的性质可知在目标收敛法(如目标定值探进在某特定值下)出现无解(包括无非整数解)时,则无需计算下去,以后将也不存在解.这说明了目标收敛法的可行性.其实目标收敛法的思想也可以理解为把目标值 z 也看成一个整数变量,也对其进行分枝估界,只是对大于最优值的那一分枝是肯定无解的,所以直接舍去.

目标收敛法与其它整数规划方法能完好结合,在不改变其它方法的性质的基础上给于加速,这也是其较好的特性之一.

参考文献:

[1] Garfinkel R S, Nemhauser G L. Integer Programming [M]. New York: Wiley, 1972.

[2] 运筹学教材编写组.运筹学[M].北京:清华大学出版社,1994.

[3] Krishnendu, Chakrabarty. Design of System-on-a-Chip Test Access Architectures using Integer Linear Programming [J]. 18th IEEE VLSI Test Symposium (VTS 00), 2000, (8): 127-130.

[4] Khomenko V, Koutny M, Yakovlev A. Detecting State Coding Conflicts in STGs Using Integer Programming. 2002 Design [A], Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE 02), 2002 338-342.

[5] Kenneth L, Clarkson. Las Vegas algorithms for linear and integer programming when the dimension is small [J]. Journal of the ACM, 1995, 42(2): 488-499.

[6] 邓先礼.最优化技术[M].重庆:重庆大学出版社,2001.

[7] 马仲番.线性整数规划的数学基础[M].北京:科学出版社,1998.

(责任编辑:黎贞崇)