

一维交通流元胞自动机 NS模型的统计平均解耦处理*

A Statistical Mechanical Approach to the Cellular Automaton NS Model of One-Dimensional Traffic Flow

彭麟¹, 吴大艳¹, 刘贵泉², 刘慕仁^{3*}

Peng Lin¹, Wu Dayan¹, Liu Guiquan², Liu Muren³

(1. 安徽工业大学数理学院, 安徽马鞍山 243002; 2. 中国计量学院理学院, 浙江杭州 310018; 3. 广西师范大学物理与信息工程学院, 广西桂林 541004)

(1. Institute of Math. & Phy., Anhui Univ. of Tech., Ma'anshan, Anhui, 243002, China; 2. Dept. of Sci., China Institute of Metrology, Hangzhou, Zhejiang, 310018, China; 3. Coll. of Phy. & Info. Tech., Guangxi Normal Univ., Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 将文献 [12] 提出的统计平均解耦处理方法推广应用到一维交通流元胞自动机 NS 模型, 根据概率论的定义, 建立一维交通流元胞自动机 NS 模型多格点耦合的空间关联函数, 得出 $t \rightarrow \infty$ 情况下平均速度随减速概率和车辆密度变化的平均场方程, 通过近似解耦处理得出车辆密度、速度及刹车概率三者的关系. 模拟结果表明, 车流平均速度与理论结果符合得较好.

关键词: 元胞自动机 退耦近似 交通流 Nagel-Schreckenberg 模型

中图分类号: TB126; U121 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)01-0035-04

Abstract With the approach applied in the literature [12], we study the cellular automaton model for one-dimensional traffic flow proposed by Nagel-Schreckenberg (NS). Mean field equations are obtained. This gives the average car speed in the long time limit as a function of the car density and the brake probability. The results are in good agreement with the simulation results.

Key words cellular automaton, the statistical mechanical approach, traffic flow, Nagel-Schreckenberg model

模拟研究交通流问题中, 由于元胞自动机模型在保留交通流这一复杂系统的非线性行为和其它物理特征的同时, 更易于在计算机上操作, 因而, 它已被广泛地应用于交通流问题的研究^[1-7].

研究元胞自动机交通流模型时, 对于一些基本的模型, 我们希望得到一些解析的结果, 从而加深对于模型的理解, 以及可以在交通工程中作为交通控制的定量依据^[8]. 文献 [9-11] 从唯象分析出发, 用平均场论方法对于交通流元胞自动机模型进行研究. 文献 [12, 13] 从严格的格点状态更新规则出发, 对 CA 空间关联函数依据概率论进行逐步地解耦近似, 给出具有随机减速因子的交通流平均速度的一般形式. 本文

将其解耦方法近似应用于一维交通流元胞自动机 (Nagel-Schreckenberg, 简称 NS) 模型, 在 $t \rightarrow \infty$ 情况下, 推导出平均速度随减速概率和车辆密度变化的平均场方程.

1 NS模型及演化方程

一维 NS 元胞自动机交通流模型定义在一维均匀的格点上, 每个格点最多能存在 1 辆车. 假设每辆车可能具有的速度 V 为 $(0, 1, \dots, M)$, t 时刻第 i 辆车的位置为 $X_i(t)$, 速度为 $V_i(t)$, 其前面第 j 辆车的位置为 $X_j(t)$, 那么该车辆的运动规则为:

$$(I) \quad V_i(t+1) = \min(d_i, V_i(t)+1, M);$$

$$(II) \quad V_i(t+1) = V_i(t) - 1, \text{ 以概率 } f \text{ 减速};$$

$$(III) \quad X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1);$$

其中, M 为车辆的可能达到的最大速度; $d_i = X_j(t) - X_i(t) - 1$; f 为车辆的减速概率. 尽管上面这个 NS

收稿日期: 2004-05-21

作者简介: 彭麟 (1977-), 男, 湖南益阳人, 硕士研究生, 主要从事交通流研究.

* 国家自然科学基金 (70371067), 广西自然科学基金 (0447030) 和广西十百千人才工程 (2001204) 资助项目.

** 联系作者.

模型非常简单,但它能再现路段上的交通流基本现象.

如果将上面的演化规则用布尔变量表示出来,可以表示为:

$$\begin{aligned} \theta_{i,t}^{*1} &= \theta_{i,t}^{*1} + \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} + \\ \theta_{i-1,t}(f) \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} + \theta_{i-1,t}(f) \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} + \\ \theta_{i-2,t}(f) \theta_{i-2}^{*1} \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} + \dots + \\ \theta_{i-M,t}(f) \theta_{i-M}^{*1} \theta_{i-M-1}^{*1} \dots \theta_{i-1}^{*1} + \\ \theta_{i-M,t}(f) \theta_{i-M}^{*1} \theta_{i-M-1}^{*1} \dots \theta_{i-1}^{*1}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\theta_{i,t}(f)$ 以概率 f 取 1, 以概率 $\bar{f} = 1 - f$ 取 0, 称为第 i 个格点在 t 时步中的随机减速因子, 它为一种随机布尔变量, 与 $\theta_{i,t}(f)$ 共轭的布尔变量为:

$$\bar{\theta}_{i,t}(f) = 1 - \theta_{i,t}(f) = \theta_{i,t}(\bar{f}),$$

其取值 0 的概率为 f , 取值为 1 的概率为 $1 - f$, 且满足关系式:

$$[\theta_{i,t}(f)]^2 = \theta_{i,t}(f), \quad \theta_{i,t}(f) \bar{\theta}_{i,t}(f) = 0,$$

$\bar{\theta}_{i,t} = 1 - \theta_{i,t}$, $\theta_{i,t}$ 为第 i 格点上车辆占据数; $\theta_{i,t} = 1$ 表示第 i 个格点在 t 时刻被车辆占据; $\theta_{i,t} = 0$ 表示第 i 个格点在 t 时刻无车辆占据, 同样满足如下关系:

$$[\bar{\theta}_{i,t}]^2 = \bar{\theta}_{i,t}, \quad \bar{\theta}_{i,t} \theta_{i,t} = 0.$$

为了明确起见, 本文仅分析 $M = 2$ 的情况, 这时上面的方程简化为:

$$\begin{aligned} \theta_{i,t}^{*1} &= \theta_{i,t}^{*1} + \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} + \\ \theta_{i-1,t}(f) \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} + \theta_{i-1,t}(f) \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} + \\ \theta_{i-2,t}(f) \theta_{i-2}^{*1} \theta_{i-1}^{*1} \theta_{i,t}^{*1}, \end{aligned} \quad (2)$$

设 t 时刻长度为 L 的格点链上有 N_t 个粒子, 则粒子的平均密度为 $d = N_t / L$, 那么

$$d = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta_{i,t} = \langle \theta_{i,t} \rangle, \quad (3)$$

t 时刻交通流平均速度的微观表达式可以表述为:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} + \\ \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} &= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} + \\ \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}(f) \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} &= \frac{1-f}{d} [\langle \theta_{i,t}^{*1} \rangle + \\ &\langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle], \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\langle \theta_{i,t}^{*1} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}^{*1}$, $\langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2}$ 分别是一维元胞自动机交通流模型两格点和三格点耦合的空间等时关联函数, 且 $\theta_{i,t}(f)$, $\bar{\theta}_{i,t}(f)$ 分别以其相应的概率 f 和 $1 - f$ 表示. 对系统充分大 $L \rightarrow \infty$, 演化时间足够长 $t \rightarrow \infty$, 假设系统有渐进稳定态

$$d = d_{*1}, V_t = V_{*1}. \quad (5)$$

在该情况下, 粒子的刹车与粒子的状态无关, 即 $\theta_{i,t}(f) = \theta_{i,t+1}(f)$. 类似地

$$\begin{aligned} V(t+1) &= \frac{1-f}{d_{*1}} [\langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \rangle + \\ \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle] &= \frac{1-f}{d_{*1}} [2 \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \rangle - \\ \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle] &= \frac{1-f}{d_{*1}} [2 \langle \theta_{i,t}^{*1} (1 - \theta_{i,t}^{*1}) \rangle - \\ \langle \theta_{i,t}^{*1} (1 - \theta_{i,t}^{*1}) \theta_{i,t}^{*2} \rangle] &= 2(1-f) - \frac{1-f}{d_{*1}} \cdot \\ [2 \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \rangle + \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle - \langle \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*1} \theta_{i,t}^{*2} \rangle], \end{aligned} \quad (6)$$

而对 t 时刻系统粒子的流量有

$$J_t = d V_t. \quad (7)$$

2 空间关联函数的表示及解耦

按照文献 [13] 的表示方法, 将元胞格点微观量简记为 $\langle \theta^i \rangle = \langle 1 \rangle_t$, $\langle \theta^{i-1} \theta^i \rangle = \langle \theta^i \theta^{i+1} \rangle = \langle 10 \rangle_t$, $\langle \theta^i \theta^{i+1} \rangle = \langle 11 \rangle_t$, $\langle \theta^{i-1} \theta^i \theta^{i+1} \rangle = \langle 101 \rangle_t$, $\langle \theta^i \theta^{i+1} \theta^{i+2} \rangle = \langle 111 \rangle_t$ 等等, 因而可以得到

$$V(t) = (1/d) [\langle 10 \rangle_t + \langle 100 \rangle_t], \quad (8)$$

将 (2) 式代入 (6) 式, 并利用 θ^i 满足的基本关系式, 采用简化形式可得 $t+1$ 时刻平均速度表达式如下:

$$\begin{aligned} V(t+1) &= 2(1-f) - (1/d) (1-f) \{ 2 \langle 111 \rangle_t + f [2 \langle 1101 \rangle_t + \langle 1100 \rangle_t + \\ \langle 1011 \rangle_t + \langle 10011 \rangle_t] + (1-f) [2 \langle 1011 \rangle_t + 2 \langle 10011 \rangle_t + \langle 1101 \rangle_t + \\ \langle 100011 \rangle_t] + f(1-f) [2 \langle 10101 \rangle_t + \\ 2 \langle 100101 \rangle_t + \langle 10100 \rangle_t + \langle 1000101 \rangle_t + \\ \langle 100100 \rangle_t] + f^2 [\langle 10101 \rangle_t + \langle 100101 \rangle_t] + \\ (1-f)^2 [\langle 10101 \rangle_t + \langle 100101 \rangle_t] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $f = 0$ 时, $V_{\max} = 2$ 的 NS 决定性模型为:

$$V(t) = (1/d) [\langle 10 \rangle_t + \langle 100 \rangle_t], \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} V(t+1) &= 2 - (1/d) \{ 2 [\langle 111 \rangle_t + \\ \langle 1011 \rangle_t + \langle 1011 \rangle_t] + \langle 1101 \rangle_t + \\ \langle 10101 \rangle_t + \langle 100011 \rangle_t + \langle 100101 \rangle_t \}. \end{aligned} \quad (10b)$$

对于 $V_{\max} = 1$ 的 NS 决定论模型, 设 2 点耦合关联函数 $\langle 10 \rangle = a$, 可以认为 i 点取 1 的概率由 i 点为 1, 同时 $i+1$ 点为 0 或为 1 的 2 者概率共同构成, 由此可知

$$\begin{aligned} \langle 11 \rangle_t &= \langle 1 \rangle_t - \langle 10 \rangle_t = d - a, \\ \langle 00 \rangle_t &= \langle 0 \rangle_t - \langle 10 \rangle_t = 1 - d - a. \end{aligned} \quad (11)$$

对 2 点以上的耦合关联函数可按照概率论做如下计算^[12], 如

$$\langle 110 \rangle_t = \langle 11 \rangle_t p \langle 1 | 0 \rangle_t,$$

其中, $p < 11|0>_t$ 表示在第 i 和第 $i+1$ 格点分别有粒子占据的条件下, 且第 $i+2$ 格点为空时的条件概率, 由于每一粒子在每一时步最多走一个格点, 因而在同一时步中对一个指定格点状态变化有影响的, 仅仅是处在该格点左右 2 个最近邻格点位置上的那些粒子. 因而可以忽略二体以上的空间关联, 只须考虑两元胞格点的耦合, 故有

$$p < 11|0>_t = p < 1|0>_t = < 10>_t / < 1>_t,$$

于是可得

$$< 110>_t = < 11>_t < 10>_t / < 1>_t = a[1 - a/d], \quad (12a)$$

$$< 100>_t = < 10>_t < 00>_t / < 0>_t = a[1 - a/(1-d)]. \quad (12b)$$

对于 $V_{\max} = 2$ 的 NS 的决定性模型的空间关联函数的计算, 应考虑 3 个元胞的格点耦合, 忽略三体以上的空间关联. 设耦合关联函数 $< 10>_t = a$, $< 100>_t = a^2/d$, 因而可以得到与 (11) 式相同的两体耦合关联函数, 而其他三体耦合关联函数仍可按 $V_{\max} = 1$ 模型下解耦为二体耦合方式计算得到

$$< 101>_t = < 10>_t - < 100>_t = a(1 - a/d);$$

$$< 110>_t = < 11>_t < 10>_t / < 1>_t = a(1 - a/d);$$

$$< 010>_t = < 001>_t = < 100>_t = a^2/d, \quad < 111>_t = d(1 - a/d)^2.$$

对于 $V_{\max} = 2$ 的随机减速概率为 f 模型的空间关联函数, 视为是 $f = 0$ 和 $f = 1$ 两种极限情形分别以按概率 $(1-f)$ 和 f 为比例的混合, 即有

$$< 100>_t = a\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\}, \quad (13)$$

其余的基本关联平均量的假设均不变, 即仍设

$$< 10>_t = a, \quad < 110>_t = a(1 - a/d), \quad (14)$$

则有

$$< 11>_t = d - a, \quad < 100>_t = 1 - d - a;$$

$$< 111>_t = < 11>_t - < 110>_t =$$

$$d(1 - a/d)^2;$$

$$< 010>_t = < 10>_t - < 110>_t = a^2/d;$$

$$< 101>_t = < 10>_t - < 100>_t = a\{1 -$$

$$(1-f)(a/d) - f[1 - a/(1-d)]\};$$

$$< 000>_t = < 00>_t - < 100>_t = 1 - d - a - a\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\};$$

$$< 001>_t = < 00>_t - < 000>_t = < 100>_t = a\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\}. \quad (15)$$

因而从假设 (13)、(14) 式出发, 可按解耦至三体关联的相同方法计算所有多格点耦合的空间关联

$$< 1011>_t = < 101>_t < 011>_t / < 01>_t = a(1 - a/d)\{1 - (1-f)(a/d) - f[1 - a/(1-d)]\};$$

$$< 1101>_t = < 110>_t < 101>_t / < 10>_t = < 1011>_t;$$

$$< 1100>_t = < 110>_t < 1101>_t =$$

$$a(1 - a/d)\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\};$$

$$< 10011>_t = < 100>_t < 001>_t$$

$$< 011>_t / (< 00>_t < 01>_t) = a^2(1 - a/d)\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\} / (1 - d - a);$$

$$< 100011>_t = < 100>_t < 000>_t < 001>_t$$

$$< 011>_t / (< 00>_t^2 < 01>_t) = a^2(1 - a/d)\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\}^2 \times \{1 - d - a - a[(1-f)(a/d) + f(1-d-a)/(1-d)]\} \times (1 - d - a)^{-2};$$

$$< 100101>_t = < 100>_t < 001>_t < 010>_t < 101>_t / (< 00>_t < 01>_t < 10>_t) = (a^3/d)(1 - a/d)\{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\}^2 \times \{1 - (1-f)(a/d) - f[1 - a/(1-d)]\} / (1 - d - a);$$

$$< 10101>_t = < 101>_t < 010>_t$$

$$< 101>_t / (< 01>_t < 10>_t) = (a^2/d)(1 - a/d)[fa + (1-f)(1-d)(1 - a/d)] / (1 - d)^2;$$

$$< 10100>_t = < 1010>_t - < 10101>_t = (a^2/d)\{1 - (1-f)(a/d) - f[1 - a/(1-d)]\} \times \{(1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)]\};$$

$$< 100100>_t = < 100>_t < 001>_t < 010>_t$$

$$< 100>_t / (< 00>_t < 01>_t < 10>_t) = (a^3/d)\{(1-f)(a/d) + f(1 - a/(1-d))\}^3 / (1 - d - a). \quad (16)$$

3 车流平均速度的理论计算与数值模拟

将空间关联函数的计算结果 (16) 中各式代入 (4) 和 (6) 式中, 可以得到

$$V(t) = (1-f)u(1+u_f), \quad (17a)$$

$$V(t+1) = 2(1-f) - (1-f)\{2(1-u)^2 + fu(1-u)[3(1-u_f) + u_f + u^2u_f^2] + (1-f)[3u(1-u)(1-u_f) + 2u(1-u)u^2u_f^2 + (1-u)(1-d - du_f)u^2u_f^2/d] + f(1-f)[2u^2(1-u_f)^2 + 2u^2(1-u_f)u^2u_f^2 + u^2u_f(1-u_f) + du^2(1-u_f)u^2/(1-d) + u^d(1-u)u^3] + f^2[u^2(1-u_f)^2 + u^2(1-u_f)u^2u_f^2] + (1-f)^2[u^2(1-u_f)^2 + u^2(1-u_f)u^2u_f^2]\}, \quad (17b)$$

$$\text{其中, } u_f = (1-f)(a/d) + f[1 - a/(1-d)], \quad (18a)$$

$$u^d = a/(1-d-a), \quad (18b)$$

$$u = a/d. \quad (18c)$$

由(18a) (18c)及(17a)可以得到

$$a = (d\{(1-f^2) + 4(1-f)[1-f/(1-d)]V(t)\}^{1/2} - d(1-f^2))/(2(1-f)[1-f/(1-d)]). \quad (19)$$

本文选定 f , 将(18)各式代入(17b)式, 并不断地进行迭代, 就可得到不同的 f 值对应的理论曲线. 另外, 在不同的 f 值下, 对 $V_{max} = 2$ 的 NS 模型直接按演化规则进行演化模拟出基本图(图 1). 图 1 结果表明, 两者不论是在定性上还是在定量上都较好的符合.

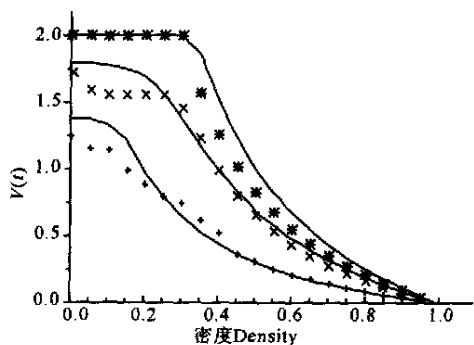


图 1 $M = 2$ 的 NS 元胞自动机交通流模型的基本图比较

Fig. 1 Fundamental diagram of the traffic flow for NS cellular automaton model at $M = 2$

“*” “×” “+” “|” 分别表示方法的刹车概率 $f = 0, 0.2, 0.6, 1$ 平均场论的理论结果

The real line is the results of simulation, the symbols of star, cross and plus are the results of mean fields method at $f = 0, 0.2, 0.6, 1$ respectively

当 $f = 0$ 时, 其理论曲线严格回到 $V_{max} = 2$ 的无随机延迟的 NS 决定性模型的精确平均场论结果. 事实上当 $f = 0$ 时, 非线性映射(17)式化为

$$V(t) = u(1+u), \quad (20a)$$

$$V(t+1) = u((1-d)^2 + u^4(4-3d)d - 2u^6d^2 + u^5(d-2d^2) + u^3(-1+d+3d^2) + u(3-8d+5d^2) + u^2(-1-4d+6d^2))/(1-d-du)^2. \quad (20b)$$

这一映射的不动点方程是

$$u(1+u) = u((1-d)^2 + u^4(4-3d)d - 2u^6d^2 + u^5(d-2d^2) + u^3(-1+d+3d^2) + u(3-8d+5d^2) + u^2(-1-4d+6d^2))/(1-d-du)^2,$$

它的 2 个非零实解分别是 $w = 1, u_2 + u^2 = k$, 它们分别对应于渐进平均速度 $v_1 = 2, v_2 = k, k$ 由 u_2 的值决定, 而 u_2 为 $lu^4 + mu^3 + nu^2 + qu + h = 0$ 的最小非零正实解, 其中 $l = 2d^2, m = d(-1+4d), n = d(-5+7d), q = 1-6d+5d^2, h = 2(-1+d)^2$.

这 2 个平均速度的稳定区域可由非线性映射的吸引域条件

$$|\partial V(t+1)/\partial V(t)| \leq 1$$

确定. 对于 $v_1 = 2$ 可得稳定区域 $d \leq \frac{1}{3}$; 对于 $v_2 = k$,

稳定区域是 $d \geq \frac{1}{3}$.

当 $f = 1$ 时, 系统的平均速度 $v = 0$, 即粒子既不产生也不消失, 同时每个粒子也不移动.

4 结束语

本文将文献 [12] 提出的交通流元胞自动机模型的统计平均解耦处理方法进一步推广应用到一维交通流元胞自动机 NS 模型, 并根据概率论的定义, 建立一维交通流元胞自动机 NS 模型多格点耦合的空间关联函数, 通过近似解耦处理得出车辆密度、速度及刹车概率三者的关系. 计算机数值模拟结果与理论结果符合得较好.

参考文献:

- [1] Nagel K, Schreckenberg M. A cellular automaton model for free freeway traffic [J]. J Phys I (France), 1992, 2: 2221-2229.
- [2] Fukui M, Ishibashi Y. Traffic flow in 1D cellular automaton model including cars moving with high speed [J]. J Phys Soc (Japan), 1996, 65(6): 1868-1870.
- [3] 汪秉宏, 王雷, 许伯铭, 等. 高速随机延迟逐步加速交通流元胞自动机模型 [J]. 物理学报, 2000, 49(10): 1926-1932.
- [4] 薛郁, 董力耘, 戴世强. 一种改进的一维元胞自动机交通流及减速概率的影响 [J]. 物理学报, 2001, 50(3): 445-449.
- [5] 董力耘, 薛郁, 戴世强. 基于跟车思想的一维元胞自动机交通流模型 [J]. 应用数学与力学, 2002, 23(4): 331-337.
- [6] 彭麟, 谭惠丽, 孔令江, 等. 开放性边界条件下双车道元胞自动机交通流模型耦合效应的研究 [J]. 物理学报, 2003, 52(12): 3007-3013.
- [7] 彭麟, 谭惠丽, 吴大艳, 等. 交通灯控制城下市主干道双车道多速元胞自动机交通流模型研究 [J]. 物理学报, 2004, 53(9): 2899-2904.
- [8] Gartner N H, Wilson N H M. Transportation and Traffic Theory [M], New York: Elsevier, 1987.
- [9] Nagatani T. Phys Rev E, 1993, 48: 3290.
- [10] Wang B H, Woo Y F, Hui P M. J Phys A: Math Gen, 1996, 29: L31.
- [11] Wang B H, Woo Y F, Hui P M. J Phys Soc Japan, 1996, 65: 2345.
- [12] 汪秉宏, 邝乐棋, 许伯铭. 高速公路交通流元胞自动机模型的一种统计平均解耦处理 [J]. 物理学报, 1998, 47(6): 906-914.
- [13] 黄兵花, 孔令江, 刘慕仁. 一维元胞自动机随机交通流模型的研究 [J]. 物理学报, 2001, 50(1): 30-36.

(责任编辑: 黎贞崇)