DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.02.004
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(2): 92~94

模糊判断矩阵的统计检验方法

The Statistical Identifying Method of Fuzzy Judgement Matrix

阮民荣[1],王玉燕[2]
Ruan Minrong[1], Wang Yuyan[2]

(1. 广西南宁地区教育学院数学系,广西南宁 530001; 2. 南京航空航天大学经济管理学院,江苏南京 210006)
(1. Dept. of Math., Nanning Prefecture Educational Coll., Nanning, Guangxi, 530001, China; 2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautis and Astronautics, Nanjing, Jiangsu, 210006, China)

摘要: 提出模糊判断矩阵的统计检验方法,给出模糊判断矩阵为模糊一致矩阵的充要条件,算例结果表明,用统计检验方法检验模糊判断矩阵的一致性是可行的和合理的.

关键词: 模糊判断矩阵 统计检验 一致性 构造
中图法分类号: O159; C934 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)02-0092-03

Abstract The statistical identifying method of fuzzy judgement matrix is given. Then, the one and only one constrains of this method is presented. Finally, this method is illustrated through a numerical example.

Key words fuzzy judgement matrix, statistical identifying method, consistency, structure

在模糊层次分析法[1]中,当决策者构造的模糊判断矩阵不一致时,需对其进行一致性检验,但目前对模糊判断矩阵一致性检验的研究不多[2~4],文献[2]提到了3种检验方法,但每种方法计算程序都比较复杂,并且在检验法中用到"图论"知识,这对具有一定"图论"知识人是适用的,而对不具有"图论"思维的工作人员却是难以理解的,并且这与层次分析法[5]的简便以行的特性背道而驰.文献[3]给出的检验方法只适用对判断矩阵进行粗略的一致性估计,文献[4]提到的检验方法虽然在理论上是可行的,但因计算复杂而限制了其在实际中的应用.可以看出,对模糊判断矩阵的一致性检验方法至今仍没有达成共识.为了更好与T. L. Saaty的AHP[5]检验法相衔接,完善模糊判断矩阵的理论体系,本文提出了模糊判断矩阵的统计检验法,尝试从新的视角去认识模糊判断矩阵的一致性.

收稿日期: 2004-05-27
作者简介: 阮民荣(1962-),男,讲师,主要从事概率与数理统计的有关理论研究.

1 相关定义与命题

定义 1[6] 设矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$,对任意 i,j 满足

(I) $0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$;

(II) $p_{ij}+p_{ji}=1$;

(III) $p_{ii}=0.5$,

则称 $\boldsymbol{P}$ 为模糊判断矩阵.

定义 2[6] 对于模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$,若任意 $i,j,k=1,2,\cdots,n$,均有

$$p_{ij}=p_{ik}-p_{jk}+0.5, \qquad (1)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 具有完全一致性或称 $\boldsymbol{P}$ 为模糊一致矩阵.

定义 3 若 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵,取

$$c_{ij}=p_{ij}-r_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n, \qquad (2)$$

则称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 为 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$ 的偏差矩阵.

命题 1 偏差矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 为反对称矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{R}$ 为互补矩阵,有

$C_{ij}=p_{ij}-r_{ij}=(1-p_{ji})-(1-r_{ji})=-(p_{ji}-r_{ji})=-c_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$,

所以 $\boldsymbol{C}$ 为反对称矩阵.命题证毕.

命题 2 若 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵,取

$$r_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{ik} - p_{jk}) + 0.5, i,j = 1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

则 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致矩阵.

证明 由已知 $r_{ik} - r_{jk} = [\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(p_{il} - p_{kl}) + 0.5] - [\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(p_{jl} - p_{kl}) + 0.5] = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p_{il} - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p_{jl} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(p_{il} - p_{jl}) = r_{ij} - 0.5.$

所以 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, i,j,k = 1,2,\cdots,n$,由定义 2知, $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致矩阵.命题证毕.

2 模糊判断矩阵的统计检验方法

设 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵,$r_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 由(3)式和命题 2可知:

$\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致性矩阵.

定理 1 $\boldsymbol{P}$ 为模糊一致矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$.

证明 必要性 若 $\boldsymbol{P}$ 具有完全一致性,则 $p_{ij} = p_{ik} - p_{jk} + 0.5$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{ik} - p_{jk} + 0.5) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{ik} - p_{jk}) + 0.5 = r_{ij},$$

即 $p_{ij} = r_{ij}, 1\leqslant i,j\leqslant n$,故 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}$.

充分性 若 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}$,由命题 2知,$P$ 具有完全一致性.定理证毕.

设 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ 为 P,R 的偏差矩阵,由定理 1易得:

定理 2 $\boldsymbol{P}$ 为模糊一致矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{C}$ 为零矩阵.

实际上,由于问题的复杂性等原因,决策者给出的模糊判断矩阵往往不具有一致性,又因为人的主观理性判断可认为存在着一致性的趋向,而不一致判断矩阵的产生可以认为是众多的随机干扰联合作用的结果,故由定理 2,一个模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的偏差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的元素 c_{ij} 可视作以 0为均值的正态随机变量,又有偏差矩阵的反对称性,有 $c_{ij}^2 = c_{ji}^2$,于是,可得下面的定理:

定理 3 设 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 为模糊判断矩阵,$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$ 为其相应的偏差矩阵,则 $c_{ij} \sim N(0,\sigma_0^2)$,$\sigma_0^2$ 为常数,且诸 $c_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 相互独立,则统计量 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}c_{ij}^2$ 服从自由度为 $(n^2 - n)/2$ 的 χ^2 分布.

定理 3的结论显然,并且易得:

定理 4 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致矩阵的充要条件为 $\chi^2 = 0$.

显然,对于一个具有满意一致性的模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}$,由其相应的偏差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 算出的上述统计量的观测量 χ_0^2 应较小.换言之,若 χ_0^2 过大,则可以认为模糊判断矩阵不具有满意一致性.于是,模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的一致性检验即成为统计假设检验问题:

H_0: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$.

对于给定的显著性水平 α,令 $P(\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2) = \alpha$,查自由度为 $(n^2 - n)/2$ 的 χ^2 分布表可得临界值 χ_α^2,当模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 χ^2 观测值 $\chi_0^2 < \chi_\alpha^2$ 时,即可认为 $\boldsymbol{P}$ 具有满意一致性;反之,则认为 $\boldsymbol{P}$ 偏离一致性程度较大,需要调整.

3 几点说明

(Ⅰ)定理 3的假设 $c_{ij} \sim N(0,\sigma_0^2)$ 中 σ_0^2 的大小反映了 c_{ij} 对数学期望 $Ec_{ij} = 0$ 偏离程度之大小.因此,对常数 σ_0^2 的不同选取反映了决策者对模糊判断矩阵具有“满意一致性”的不同要求.显然,较小的 σ_0^2 值意味着对判断一致性的较高要求.因此,决策人可依据决策问题的具体情况以及个人偏好选取适当的 σ_0^2 值.一般可令 σ_0^2 取 0.01, 0.04或 0.09中的任何一个值或是满足不等式 $0.01\leqslant \sigma_0^2 \leqslant 0.09$ 的其它值,鉴于 0.1~0.9标度[7]的限制,对模糊判断矩阵中低阶矩阵一般可取 0.01或 0.04,高阶矩阵可取 0.04或 0.09.

(Ⅱ)实际上,定理 3给出了判断模糊矩阵具有“满意一致性”的检验统计量:

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}c_{ij}^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[p_{ij} - r_{ij}]^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[p_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{ik} - p_{jk}) - 0.5]^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}[\sum_{k=1}^{n}(p_{ij} - 0.5 - p_{ik} + p_{jk})]^2. \tag{4}$$

这样,可采用(4)式作为检验模糊判断矩阵一致性的检验统计量.

(Ⅲ)统计检验法作为一种统计假设检验,其检验临界值依赖于显著性水平 α 的选取.与一般假设检验一样,α 可取 0.1, 0.05, 0.01等几个水平,表 1列出 3~9阶模糊判断矩阵在不同显著性水平 α 下的临界值.

表 1 χ^2检验临界值

Table 1 The identifying values of χ^2

显著性水平 α The outstanding standard α	3	4	5	6	7	8	9
0.1	6.251	10.654	15.987	22.307	29.615	37.916	47.212
0.05	7.815	12.592	18.307	24.996	32.617	41.671	50.998
0.01	11.345	16.812	23.209	30.578	38.932	48.278	58.619

4 算例

假设两决策者针对决策方案集 $X=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 提供的模糊判断矩阵分别为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7\\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4\\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9\\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2 & 0.6 & 0.7\\ 0.8 & 0.5 & 0.8 & 0.8\\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.7\\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}.$$

下面分别采用统计检验法、文献[3]的一致性检验法对 A,B 进行一致性检验,检验结果见表2.表2结果表明2种检验方法所得结论一致,这进一步说明了统计检验方法检验模糊判断矩阵一致性的可行性与合理性.

5 结束语

统计检验法不仅具有可靠的理论基础,而且具有简便可行、容易掌握等特点.它弥补了其它检验法的某些不足,例如对低阶矩阵要求过松,对高阶矩阵要求过严的缺陷.此外,由于检验统计量中参数 ε_0 以及显著性水平 α 的选定有一定的灵活性,即可由决策人根据决策问题的不同情况以及其个人偏好加以选定,这就为决策人留有较大的自由空间,由此得以展现决策艺术性的一面.

表 2 检验结果

Table 2 The identifying results

矩阵 Matrix		统计检验法 The statistical identifying method ($\varepsilon_0=0.09,\alpha=0.1$)	文献[3]的一致性检验法 The consistency checking method of reference[3] ($\lambda=0.2$)
	A	$x_0^2=13.9>\chi^2_{0.1}=10.645$	$\delta=0.208>\lambda=0.2$
	B	$x_0^2=3.9>\chi^2_{0.1}=10.645$	$\delta=0.058<\lambda=0.2$
结论 Conclusion	***A***	$x_0^2>\chi^2_{0.1}$, A不具有可满意一致性 A has not the satisfied consistency	$\delta>\lambda$,A不具有满意一致性 $\delta>\lambda$,A has not the satisfied consistency
	B	$x_0^2>\chi^2_{0.1}$, B具有满意一致性 $\delta<\lambda$,B has the satisfied consistency	$\delta<\lambda$,B具有满意一致性 B has the satisfied consistency

参考文献:

[1] 张吉军.模糊层次分析法(FAHP)[J].模糊系统与数学,2000,14(2):80–88.

[2] 姜艳萍.基于模糊一改判断矩阵的决策理论与方法研究[D].〔博士学位论文〕.沈阳:东北大学,2002.1.

[3] 宋光兴,杨德礼.模糊判断矩阵的一致性检验及一致性改进方法[J].系统工程,2003,21(1):110–116.

[4] 邱涤珊,李元左.模糊广义判断矩阵的一致性检验及合排序[J].模糊系统与数学,1999,13(3):45–51.

[5] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw-Hill,1980.

[6] 姚 敏,张 森.模糊一致矩阵及其在决策分析中的应用[J].系统工程理论与实践,1998,18(5):78–81.

[7] 徐泽水.AHP中两类标度的关系研究[J].系统工程理论与实践,1999,19(7):97–101.

(责任编辑:黎贞崇)

抗氧化酶能延缓动物衰老

美国科学家通过对实验鼠的研究证明,在细胞内增加抗氧化酶的生成会显著延长动物寿命、减少与衰老相关的疾病。这一成果也进一步支持了自由基引起衰老的理论。

研究人员研究发现,细胞内过氧化氢酶增加的实验鼠,寿命比对照组的实验鼠都有不同程度的延长。特别是细胞线粒体内增加过氧化氢酶的实验鼠,平均寿命达到4个半月,比对照组的实验鼠延长了20%,而细胞核、细胞质中增加过氧化氢酶的实验鼠,寿命延长没有那么显著。

研究人员还发现,线粒体内过氧化氢酶增加的实验鼠,心肌纤维远比对照组的实验鼠健康,这表明过氧化氢酶保护了心肌细胞不发生因衰老引起的病变。同时,这些实验鼠的细胞线粒体突变更少,基因中发生氧化的部分也更少。

这项研究成果的意义,首先在于支持了自由基引起衰老的理论。其次,证明了线粒体在衰老过程中的关键作用,揭示了衰老发生的步骤。线粒体是细胞的"能源工厂",在生成细胞能源的过程中会产生大量自由基,因此,在线粒体这个"源头"上防止自由基生成,将是延长寿命最有效的方法。 据《科学时报》