DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.002
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(3):165~166, 171

利用子群次正规性对有限群幂零性的判断*

The Deduction of Nilpotency of Finite Groups Depends on Subnormal Subgroups

郭鹏飞[1,2]

Guo Pengfei[1,2]

(1. 山西师范大学数学与计算机科学学院,山西临汾 041004; 2. 连云港师范高等专科学校数学系,江苏连云港 222006)

(1. Coll. of Math. and Comp., Shanxi Teachers Univ., Linfen, Shanxi, 041004, China; 2. Dept. of Math., Lianyungang Teachers Coll., Lianyungang, Jiangsu, 222006, China)

摘要:研究次正规子群对有限群结构的影响,得到幂零群的若干等价条件和一个充分条件.

关键词:次正规子群 正规化子 正规子群 幂零群

中图法分类号:O152 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2005)03-0165-02

Abstract: Considering the subnormal subgroups, some equivalent conditions for nilpotency of finite groups are given and a sufficient condition for nilpotency of finite groups is obtained.

Key words: subnormal subgroups, normalizer, normal subgroups, nilpotent groups

次正规子群是本文的一个核心概念,设 G 是一个群,$G_0, G_1, \cdots, G_r$ 是 G 的一些子群,满足 $1 = G_r \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$,则称此群列为 G 的一个次正规群列,$G_i (i = 0, 1, \cdots, r)$ 称为 G 的次正规子群.国内外许多群论学家利用次正规子群的性质研究有限群的幂零性,已取得了丰硕成果.如文献[1]定理5.2.4:G 是有限幂零群 $\Leftrightarrow G$ 的每个子群都是 G 的次正规子群.事实上,若群 G 的极大子群 M 在 G 中次正规,则 $M \trianglelefteq G$.显然有:G 是有限幂零群 $\Leftrightarrow G$ 的每个极大子群都是 G 的次正规子群.本文的主要目的是进一步研究子群的次正规性对有限群幂零性的影响.此外,借助极小非幂零群的结构得到有限群幂零的一个充分条件.本文研究的群均为有限群,所用群论术语符号都是规范的[2].特别地,P sn G、P char G 分别表示 P 为 G 的次正规子群、特征子群,$M \lessdot G$ 表示 M 为 G 的极大子群,$M <\cdot G$ 表示 M 为 G 的真子群.

引理1 设 G 为有限群,$M <\cdot G$ 且 $M \trianglelefteq G$,则 $|G:M| = p$,p 为素数.

证明 若 $|G:M|$ 为合数,则 G/M 必有非平凡子群 A/M.由此得 $M < A < G$,与题设矛盾,故 $|G:M| = p$.

引理2 设 G/N 为幂零群,且 $N \leqslant Z(G)$,则 G 为幂零群.

证明 $\forall P \in Syl_p(G)$,则 $PN/N \in Syl_p(G/N)$.由 G/N 幂零,得 $PN/N \trianglelefteq G/N$,从而 $PN \trianglelefteq G$.因为 $P \in Syl_p(PN)$,由 Frattini 论断[2]可得 $G = N_G(P)PN = N_G(P)N$.又因为 $N \leqslant Z(G) \leqslant C_G(P) \leqslant N_G(P)$,所以 $G = N_G(P)$,即 $P \trianglelefteq G$,从而 G 为幂零群.

定理1 下列条件对有限群 G 等价:

(i) G 幂零;

(ii) G 的 Sylow 子群的正规化子均在 G 中次正规;

(iii) G 的极大子群的 Sylow 子群均在 G 中次正规;

(iv) G 的极大子群的 Sylow 子群在 G 的极大子群中的正规化子均在 G 中次正规;

(v) G 的素数幂阶循环子群均在 G 中次正规;

(vi) G 的极大子群的 Sylow 子群的循环子群均在 G 中次正规.

定理1的证明依赖于内幂零群的结构,内幂零群的结构由 Iwasawa 和其他数学工作者共同得出[2].

证明 (i)⇒(ii),(iii),(iv),(v),(vi).由于幂零群的任一子群均为次正规子群,所证显然成立.

收稿日期:2005-01-11
修回日期:2005-02-22
作者简介:郭鹏飞(1972-),男,在读硕士研究生,主要从事群论研究。
*国家自然科学基金(10471085)、山西省自然科学基金(20051007)、教育部科学技术研究重点项目(02023)和山西省回国留学人员基金(晋出留管办字[2004]7号)联合资助。

(ii)$\Rightarrow$(i). $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 由题设 $N_G(P)$ sn G, 由文献[2] 第 59 页命题 2.5 知 $N_G(P)=N_G(N_G(P))$. 若 $N_G(P)< G$, 则与题设矛盾, 所以 $N_G(P)=G$, 即 $P\trianglelefteq G$. 由 P 的任意性得 G 幂零.

(iii)$\Rightarrow$(i).

设 G 为极小阶反例.

$\forall M<\cdot G$, $P\in \mathrm{Syl}_p(M)$, 由题设 P sn G, 得 P sn M, 从而 $P\trianglelefteq M$. 由 P 的任意性可知 M 幂零. 若 G 非幂零, 则 G 为内幂零群.

由文献[2] 第 142 页定理 4.2 知 $|G|=p^aq^b$, 且对于 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$, 有 $P\trianglelefteq G$ 且 Q 循环. 由文献[2] 第 141 页的定理 4.1 知 G 是可解群, 则 G 必有一极大子群正规于 G, 不妨设为 M. 由引理 1 知 $|G:M|$ 为素数, 所以 $|G:M|=p$ 或 q.

(1) 若 $|G:M|=p$, 设 $G/M=\langle xM\rangle$, 则 $G=\langle M,x\rangle=M\langle x\rangle$. $\forall Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$, 计算阶可知, $MQ<G$, 故 $MQ=M$, 即 $Q\in \mathrm{Syl}_q(M)$. 由 M 幂零可知, Q char $M\trianglelefteq G$, 所以 $Q\trianglelefteq G$, 与假设矛盾.

(2) 若 $|G:M|=q$, $\forall Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$.

1) 如果 $|Q|>q$, 由 $M\trianglelefteq G$, 则 $Q\cap M\in \mathrm{Syl}_q(M)$. 令 $Q\cap M=Q_1$, 由题设 Q_1 sn G, 得 Q_1 sn M, 所以 Q_1 char $M\trianglelefteq G$, 从而 $Q_1\trianglelefteq G$. 这时 $Q_1P=Q_1\times P$, 所以 $Q_1\leqslant C_G(P)$. 又因为 Q 循环, 从而 $Q_1\leqslant Z(G)$. $\forall M'/Q_1<\cdot G/Q_1$, $R/Q_1\in \mathrm{Syl}_p(M'/Q_1)$, 有 $Q_1\leqslant M'<\cdot G$. 由 $(p,|M'/Q_1:R/Q_1|)=1$, 得 $(p,|M':R|)=1$, 故必存在 $S\in \mathrm{Syl}_p(M')$, 使 $R=SQ_1$. $\forall T/Q_1\in \mathrm{Syl}_q(M'/Q_1)$, 则 $T\in \mathrm{Syl}_q(M')$. 由题设 S sn G, T sn G, 则 SQ_1/Q_1 sn G/Q_1, T/Q_1 sn G/Q_1, 于是 G/Q_1 满足题设且 $|G/Q_1|<|G|$, 由 G 的极小性可得 G/Q_1 幂零, 从而 $G/Z(G)$ 幂零. 由引理 2 得 G 幂零, 矛盾.

2) 如果 $|Q|=q$, 则 $|G|=p^aq$.

若 $Q<\cdot G$, 则 Q 为自身的 Sylow 子群. 由题设可知 Q sn G, 所以 $Q\trianglelefteq G$, 从而 G 幂零, 矛盾. 若 Q 不是 G 的极大子群, 则必存在 G 的极大子群 M_1 使 $Q\leqslant M_1<\cdot G$, 即 $Q\in \mathrm{Syl}_q(M_1)$. 由题设 Q sn G, 所以 $Q\trianglelefteq G$, 再次得矛盾.

综上所述, 极小阶反例不存在, 从而 G 为幂零群.

(iv)$\Rightarrow$(i)

$\forall M_1<\cdot G$, $P_1\in \mathrm{Syl}_p(M_1)$, 由题设 $N_{M_1}(P_1)$ sn G, 得 $N_{M_1}(P_1)$ sn M_1, 再由(ii)$\Rightarrow$(i) 可知 M_1 幂零. $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 若 $P\ntrianglelefteq G$, 则 $N_G(P)<G$, 从而必存在 $M<\cdot G$ 使 $N_G(P)\leqslant M$. 显然 $P\in \mathrm{Syl}_p(M)$. 由 M 幂零, 得 $P\trianglelefteq M$, 故 $M\leqslant N_G(P)$, 从而 $M=N_G(P)=N_M(P)$. 由题设可知 M sn G, 得 $M\trianglelefteq G$. 由 P char $M\trianglelefteq G$ 得 $P\trianglelefteq G$, 与假设矛盾, 所以 $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 有 $P\trianglelefteq G$, 从而 G 幂零.

(v)$\Rightarrow$(i).

设 G 为极小阶反例.

$\forall M\leqslant G$, N 为 M 的素数幂阶循环子群, 当然 N 为 G 的素数幂阶循环子群. 由题设 N sn G, 则 N sn M, 所以定理条件子群遗传. 若 G 非幂零, 则 G 为内幂零群. 由文献[2] 第 142 页定理 4.2 知 $|G|=p^aq^b$, 且对于 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$, 有 $P\trianglelefteq G$, Q 循环. 由题设 Q sn G, 得 $Q\trianglelefteq G$, 与假设矛盾.

极小阶反例不存在, 从而 G 幂零.

(vi)$\Rightarrow$(i).

设 G 为极小阶反例.

$\forall M<\cdot G$, 由题设 M 的 Sylow 子群的循环子群均在 G 中次正规, 从而在 M 中次正规. 由(v)$\Rightarrow$(i) 可知 M 幂零. 若 G 非幂零, 则 G 为内幂零群. 由文献[2] 第 142 页定理 4.2 知 $|G|=p^aq^b$, 且对于 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$, 有 $P\trianglelefteq G$, Q 循环. 由文献[2] 第 141 页定理 4.1 知 G 可解, 则 G 必有一个极大子群 M 正规于 G 且有 $|G:M|=p$ 或 q.

若 $|G:M|=p$, 同(iii)$\Rightarrow$(i) 可得 G 幂零, 矛盾.

若 $|G:M|=q$, 可设 $M=PQ_1$, 其中 $Q_1\in \mathrm{Syl}_q(M)$ 且 $Q_1<\cdot Q'\in \mathrm{Syl}_q(G)$. 由 M 幂零可得 Q_1 char $M\trianglelefteq G$, 故 $Q_1\trianglelefteq G$, 从而 $Q_1P=Q_1\times P$. 同(iii)$\Rightarrow$(i) 可得 G 幂零, 矛盾, 所以必有 $Q_1=1$, 即 Q' 为 q 阶群, $|G|=p^aq$. 若 $Q'<\cdot G$, 由题设 Q' sn G, 所以 $Q=Q'\trianglelefteq G$, 矛盾. 若 Q' 不为 G 的极大子群, 则 $\exists M'<\cdot G$ 使 $Q'\leqslant M'<G$, 这时 Q' 为 M' 的 q-Sylow 子群, 由题设 Q' sn G, 所以 $Q=Q'\trianglelefteq G$, 矛盾.

综上所述, 极小阶反例不存在, 从而 G 幂零.

定理 1 证明了: 群 G 的 Sylow 子群的正规化子均在 G 中次正规, 则 G 幂零. 那么对某个 $p\,||G|$, 若群 G 的 p-Sylow 子群的正规化子均在 G 中次正规, 推论 1 给出了 G 性质.

推论 1 若群 G 的 p-Sylow 子群的正规化子均在 G 中次正规, 则 G 为 p-闭群.

证明 由定理 1 (ii)$\Rightarrow$(i) 知, 对 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 有 $P\trianglelefteq G$, 故 G 为 p-闭群.

推论 2 若群 G 的 Hall 子群的正规化子均在 G 中次正规, 则 G 幂零.

证明 由于群 G 的 Sylow 子群均为 Hall 子群, 故由定理 1(ii)$\Rightarrow$(i) 可得.

在试图确定群 G 的 Sylow 子群的极大子群均在 G 中半正规的群结构过程中, 发现下面结论成立.

(下转第 171 页 Continue on page 171)

(2)$\Rightarrow$(3) 显然;

(3)$\Rightarrow$(1) 如果 S 是奇异单右 R- 模, 从而是具有本质基座的拟内射不可分模, 于是 S 和 $E(S)$ 属于模类 M, 而 $S \trianglelefteq E(S)$ 意味着 S 是内射模, 于是由引理 1 知 R 是右 GV- 环.

推论 1 R 是 GV- 环当且仅当任一具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R- 模是内射模.

证明 “$\Leftarrow$” 任一奇异单右 R- 模 M 是具有本质基座的拟内射不可分奇异 R- 模, 由假设知 M 是内射模, 由引理 1 可知 R 是右 GV- 环.

“$\Rightarrow$” 如果 M 是具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R- 模, 则根据定理 1 知 M 是单右 R- 模, 即 M 是内射模.

由于 V- 环一定是 GV- 环, 命题 4 推广了文献[6] 定理 2.3 的结论.

命题 1 对一个右 GV- 环 R, 下列条件等价:

(1) R 是一个半单环;

(2) 投射右 R- 模类 $\mathscr{P}_R$ 是 Socle-fine 的;

(3) 平坦右 R- 模类 $\mathscr{F}_R$ 是 Socle-fine 的.

证明 (1)$\Rightarrow$(3) 如果 R 是半单环, 则所有 R- 模都是半单的. 因此, 平坦 R- 模类 $\mathscr{F}_R$ 是 Socle-fine 的;

(3)$\Rightarrow$(2) 由投射模是平坦模即得;

(2)$\Rightarrow$(1) 由引理 1 知 $Soc(R_R)$ 是投射模, 从而 $Soc(R_R)$, $R_R \in \mathscr{P}_R$ 且 $Soc(R_R) = Soc(Soc(R_R))$. 根据假设有 $R_R \cong Soc(R_R)$, 即 R 是半单环.

致谢

在此对 南庆教授的悉心指导和帮助表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[2] 吴 俊, 殷晓斌. N- 环 Von-Neumann 正则性[J]. 数学研究与评论, 2001, 21(2): 267-272.

[3] 周海燕, 王小冬. Von Neumann regular rings and right SF-rings[J]. 东北数学, 2004, 20(1): 75-78.

[4] 郭莉琴, 赵 良. 关于拟 duo-环的正则性[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2004, 18(3): 13-15.

[5] Ramamurthy V S, Rangaswamy K M. Generalised V-rings[J]. Math Scandinavica, 1972, (31): 69-77.

[6] Idelhadj A, Kaidi A. New characterizations of V-rings and Pseudo-Frobenius rings[J]. Comm Algebra, 1995, 25(14): 5329-5338.

[7] Kaidi A, Barquero D M, Conzalez C M. Socle-fine characterization of artinian and noetherian rings[J]. Algebras Groups and Geometries, 1993, (10): 191-198.

[8] Goodeal K R. Ring Theory: Nonsingular Rings and Rodules[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1976.

[9] Baccela G. Generalized V-rings and Von Neumann regular rings[J]. Rend Sem Mat Univ Padova, 1984, (72): 117-133.

[10] Varadarajan K. Generalised V-rings and torsion theories[J]. Comm Algebra, 1986, 14(3): 455-467.

[11] Harada M. Note on quasi-injective modules[J]. Osaka J Math, 1965, (2): 351-356.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 166 页 Continue from page 166)

定理 2 设群 G 超可解, 若 $\forall r, t \in \pi(G)$ 且 $t \nmid (r-1)$, 则 G 幂零.

证明 设 G 为极小阶反例.

由于超可解性是子群遗传且商群遗传的, 子群和商群阶的素因子都是群 G 的素因子, 所以命题条件子群遗传且商群遗传, 故可设 G 为极小非幂零群. 由文献[3] 第 8 页定理 1.5 知: 极小非幂零群为 $p^b q$ 阶群, 其定义关系为:

$$a^q = c_1^p = c_2^p = \cdots = c_b^p = 1,$$
$$c_i c_j = c_j c_i,\ i, j = 1, 2, \cdots, b,$$
$$c_i^a = c_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, b-1,$$
$$c_b^a = c_1^{d_1} c_2^{d_2} \cdots c_b^{d_b}.$$

其中 $f(x) = x^b - d_b x^{b-1} - \cdots - d_2 x - d_1$ 为 F_p 上的一个 b 次不可约多项式, 且为 $x^q - 1$ 的因子, b 是 $p(\mathrm{mod}\ q)$ 的指数, $b \mid (q-1)$. 设 H 为 G 的极小正规子群, 由 $\langle a \rangle \trianglelefteq G$, 则必有某个 $c_i \in H$, 由定义关系 $c_i^a = c_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, b-1)$, $c_b^a = c_1^{d_1} c_2^{d_2} \cdots c_b^{d_b}$ 易知, $H^G = P$, 即 P 为 G 的极小正规子群. 由于 b 是 $p(\mathrm{mod}\ q)$ 的指数, 若 $b = 1$, 则 $q \mid (p-1)$, 与假设矛盾, 所以 $b > 1$, 即 P 非循环, 从而 G 非超可解, 矛盾于假设, 故 G 为幂零群.

注 1 定理 **2** 中假设条件“$t \nmid (r-1)$” 不可去, 如 S_3 超可解, 但非幂零.

注 2 定理 **2** 中假设条件“群 G 超可解” 不可去. 例: 设 $G = (\langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle) \rtimes \langle a \rangle \cong (Z_5 \times Z_5) \rtimes Z_3$, 其中 $a^3 = c_1^5 = c_2^5 = 1$, $c_1^a = c_2$, $c_2^a = c_1^4 c_2^4$. G 满足: $\forall r, t \in \pi(G)$ 有 $t \nmid (r-1)$. 由于 $|G| = 75$, 易知 G 为内交换群, 由文献[3] 第 49 页定理 7.3 可知, G 为极小非超可解群, 故 G 非幂零.

致谢

本文是在张勤海教授的精心指导下完成的, 在此表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Robinson DJS. A Course in the Theory of Groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[2] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] 陈重穆. 内外 Σ- 群与极小非 Σ 群[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1988.

(责任编辑: 黎贞崇)