DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.004
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(3): 170～171

GV-环的一个新的刻划*

A New Characterization of GV-ring

郭勇华
Guo Yonghua

(广西师范大学数学与计算机科学学院,广西桂林 541004)
(Coll. of Math. &Comp. Sci., Guangxi Normal Univ. Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用模类的 Socle-fine 性质给出了 GV-环的一个新的刻划,同时推广了文献[6] 定理 2.3 的结果.

关键词: GV-环 基座 (拟)内射模 不可分奇异模
中图法分类号: O153.3; O154 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)03-0170-02

Abstract: A new characterization of a GV-ring in terms of the socle-fine proerty of module class was provided, and the theorem 2.3 in reference [6] was generalized.

Key words: GV-ring, socle, (quosi-)injective module, indecomposable singular module

本文 R 总是表示有单位元的(交换或非交换)结合环,所有的模都是右酉模. $Soc(R_R)$ 是环 R 的右基座. 对于一个右 R-模 M, $J(M)$ 表示 M 的 Jacobson 根, $Z(M)$ 表示 M 的奇异子模,即

$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0, I$ 是 R 的本质右理想$\}$.

在 $Z(M)=M$ 时,称 M 是奇异模. 本文未说明的其它概念和符号均出自文献[1].

Von-Neumann 正则环的研究在环论中一直是一个活跃的领域[2～4], Ramamurthy 和 Rangaswamy 所引进和研究的 GV-环[5] 是 Von-Neumann 正则环的一种重要的推广. 环 R 称为右 GV-环,是指每一个单右 R-模为投射模或内射模. 令 A 是由一些右 R-模组成的类,称 A 是 Socle-fine 的,是指 A 满足条件: 对 $\forall M, N \in A$, M 和 N 是模同构当且仅当 $Soc(M)$ 和 $Soc(N)$ 是模同构. 对给定的环 R,通过它的 Socle-fine 模类来刻划它, A. Kaidi 和 A. Idelhadj 已经在这方面证明了一些重要的结论[6,7]. 本文将利用模类的 Socle-fine 性质来刻划 GV-环.

引理 1 是一些关于 GV-环的已知结论.

引理 1 对环 R 而言,下列条件等价:

(1) R 是一个右 GV-环;

(2) 每一个奇异单右 R-模都是内射模;

(3) 对所有的右 R-模 M 有 $J(M) \cap Z(M) = 0$;

(4) 对所有的循环右 R-模 M 有 $J(M) \cap Z(M) = 0$;

(5) $Soc(R_R)$ 是投射模且 $R/Soc(R_R)$ 是一个右 V-环;

(6) 对所有使得 $Z(M)$ 是 M 的本质子模的右 R-模 M 都有 $J(M) = 0$;

(7) 对所有使得 $Z(M)$ 是 M 的本质子模的循环右 R-模 M 有 $J(M) = 0$;

(8) R 的每一个非平凡本质右理想都是极大右理想的交,且 $Z(R) \cap J(R) = 0$.

证明 (1)⇔(2) 根据文献[8] 命题 1.24,一个单右 R-模只能是奇异模或投射模,且不能同时成立,所以由右 GV-环的定义即得;

(1)⇔(5) 由文献[9] 定理 2.2 即得; 而(1)、(3)、(4)、(7) 之间的等价由文献[10] 定理 4.2 可得; (1)、(6)、(8) 之间的等价由文献[5] 定理 3.3 可得.

定理 1 给出了 GV-环的新的刻划.

定理 1 对环 R 而言,下列条件等价:

(1) R 是一个右 GV-环;

(2) 任一具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R-模和它的内射包都是单右 R-模;

(3) 由具有本质基座的拟内射不可分奇异模和它的内射包组成的模类 M 是 Socle-fine 的.

证明 (1)⇒(2) 对任一具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R-模 Q,设 S 是 Q 的单子模 则有 $S \leqslant Q \leqslant E(Q)$. 但是由文献[11] 命题 2.3 可知 $E(Q)$ 不可分; 而 $Z(S) = S \cap Z(Q) = S \cap Q = S$ 表明 S 是奇异模,由引理 1 知 S 是内射模,即有 $E(Q) = S = Q$;

收稿日期: 2004-11-30
作者简介: 郭勇华(1976-),男,湖南醴陵人,讲师,硕士,主要从事代数研究。
*广西师范大学青年基金资助项目。

(2) ⇒(3) 显然;

(3) ⇒(1) 如果 S 是奇异单右 R- 模, 从而是具有本质基座的拟内射不可分模, 于是 S 和 $E(S)$ 属于模类 M, 而 $S \trianglelefteq E(S)$ 意味着 S 是内射模, 于是由引理 1 知 R 是右 GV- 环.

推论 1 R 是 GV-环当且仅当任一具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R- 模是内射模.

证明 “⇐” 任一奇异单右 R- 模 M 是具有本质基座的拟内射不可分奇异 R- 模, 由假设知 M 是内射模, 由引理 1 可知 R 是右 GV- 环.

“⇒” 如果 M 是具有本质基座的拟内射不可分奇异右 R- 模, 则根据定理 1 知 M 是单右 R- 模, 即 M 是内射模.

由于 V- 环一定是 GV- 环, 命题 4 推广了文献[6]定理 2.3 的结论.

命题 1 对一个右 GV- 环 R, 下列条件等价:

(1) R 是一个半单环;

(2) 投射右 R- 模类 $\mathscr{P}_R$ 是 Socle-fine 的;

(3) 平坦右 R- 模类 $\mathscr{F}_R$ 是 Socle-fine 的.

证明 (1) ⇒(3) 如果 R 是半单环, 则所有 R- 模都是半单的. 因此, 平坦 R- 模类 $\mathscr{F}_R$ 是 Socle-fine 的;

(3) ⇒(2) 由投射模是平坦模即得;

(2) ⇒(1) 由引理 1 知 $Soc(R_R)$ 是投射模, 从而 $Soc(R_R)$, $R_R \in \mathscr{P}_R$ 且 $Soc(R_R) = Soc(Soc(R_R))$. 根据假设有 $R_R \cong Soc(R_R)$, 即 R 是半单环.

致谢

在此对 南庆教授的悉心指导和帮助表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[2] 吴 俊, 殷晓斌. N- 环 Von-Neumann 正则性[J]. 数学研究与评论, 2001, 21(2): 267-272.

[3] 周海燕, 王小冬. Von Neumann regular rings and right SF-rings[J]. 东北数学, 2004, 20(1): 75-78.

[4] 郭莉琴, 赵 良. 关于拟 duo-环的正则性[J]. 甘肃联合大学学报(自然科学版), 2004, 18(3): 13-15.

[5] Ramamurthy V S, Rangaswamy K M. Generalised V-rings[J]. Math Scandinavica, 1972, (31): 69-77.

[6] Idelhadj A, Kaidi A. New characterizations of V-rings and Pseudo-Frobenius rings[J]. Comm Algebra, 1995, 25(14): 5329-5338.

[7] Kaidi A, Barquero D M, Conzalez C M. Socle-fine characterization of artinian and noetherian rings[J]. Algebras Groups and Geometries, 1993, (10): 191-198.

[8] Goodeal K R. Ring Theory: Nonsingular Rings and Rodules[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1976.

[9] Baccela G. Generalized V-rings and Von Neumann regular rings[J]. Rend Sem Mat Univ Padova, 1984, (72): 117-133.

[10] Varadarajan K. Generalised V-rings and torsion theories[J]. Comm Algebra, 1986, 14(3): 455-467.

[11] Harada M. Note on quasi-injective modules[J]. Osaka J Math, 1965, (2): 351-356.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 166 页 Continue from page 166)

定理 2 设群 G 超可解, 若 $\forall r, t \in \pi(G)$ 且 $t \nmid (r-1)$, 则 G 幂零.

证明 设 G 为极小阶反例.

由于超可解性是子群遗传且商群遗传的, 子群和商群阶的素因子都是群 G 的素因子, 所以命题条件子群遗传且商群遗传, 故可设 G 为极小非幂零群. 由文献[3]第 8 页定理 1.5 知: 极小非幂零群为 p^bq 阶群, 其定义关系为:

$$a^q = c_1^p = c_2^p = \cdots = c_b^p = 1,$$
$$c_ic_j = c_jc_i,\ i, j = 1, 2, \cdots, b,$$
$$c_i^a = c_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, b-1,$$
$$c_b^a = c_1^{d_1}c_2^{d_2}\cdots c_b^{d_b}.$$

其中 $f(x) = x^b - d_bx^{b-1} - \cdots - d_2x - d_1$ 为 F_p 上的一个 b 次不可约多项式, 且为 $x^q - 1$ 的因子, b 是 $p(\bmod\ q)$ 的指数, $b \mid (q-1)$. 设 H 为 G 的极小正规子群, 由 $\langle a\rangle \trianglelefteq G$, 则必有某个 $c_i \in H$, 由定义关系 $c_i^a = c_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, b-1)$, $c_b^a = c_1^{d_1}c_2^{d_2}\cdots c_b^{d_b}$ 易知, $H^G = P$, 即 P 为 G 的极小正规子群. 由于 b 是 $p(\bmod\ q)$ 的指数, 若 $b = 1$, 则 $q \mid (p-1)$, 与假设矛盾, 所以 $b > 1$, 即 P 非循环, 从而 G 非超可解, 矛盾于假设, 故 G 为幂零群.

注 1 定理 2 中假设条件“$t \nmid (r-1)$”不可去, 如 S_3 超可解, 但非幂零.

注 2 定理 2 中假设条件“群 G 超可解”不可去. 例: 设 $G = (\langle c_1\rangle \times \langle c_2\rangle) \rtimes \langle a\rangle \cong (Z_5 \times Z_5) \rtimes Z_3$, 其中 $a^3 = c_1^5 = c_2^5 = 1$, $c_1^a = c_2$, $c_2^a = c_1^4c_2^4$. G 满足: $\forall r, t \in \pi(G)$ 有 $t \nmid (r-1)$. 由于 $|G| = 75$, 易知 G 为内交换群, 由文献[3]第 49 页定理 7.3 可知, G 为极小非超可解群, 故 G 非幂零.

致谢

本文是在张勤海教授的精心指导下完成的, 在此表示衷心的感谢.

参考文献:

[1] Robinson DJS. A Course in the Theory of Groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[2] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[3] 陈重穆. 内外 Σ— 群与极小非 Σ 群[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1988.

(责任编辑: 黎贞崇)