DOI：10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.005
广西科学 Guangxi Sciences 2005，12(3)：172～173，176

两尺度矩阵与正交小波*

Two-Scale Matrixes and Orthogonal Wavelets

宣浩，杨美香

Ding Xuanhao，Yang Meixiang

（桂林电子工业学院计算科学与数学系，广西桂林 541004）

（Dept. of Comp. Sci. &Math.，Guilin Inst. of Elec. Tech.，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要：设尺度函数 $\varphi(x)\in V_0$ 生成 $L^2(R)$ 的一个多分辨分析 $\{V_j\}$，$W_0 + V_0 = V_1$，小波 $\Psi\in W_0$，两尺度关系是 $\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$，$\Psi(x)=\sum_k q_k\phi(2x-k)$，傅立叶变换式为 $\phi(\omega)=P(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，$\Psi(\omega)=Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，$z=e^{-i\omega/2}$，两尺度矩阵为 $M(z)=\begin{bmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{bmatrix}$．$\{\Psi(x-k):k\in Z\}$ 为 W_0 的标准正交基的充要条件是：对几乎所有的 $z\in T$ 两尺度矩阵 $M(z)$ 为酉矩阵．

关键词：正交小波 两尺度矩阵 多分辨分析 构造
中图法分类号：O174.2 文献标识码：A 文章编号：1005-9164(2005)03-0172-02

Abstract：Let scaling function $\varphi(x)\in V_0$ yield a Multiresolution analysis $\{V_j\}$ of $W_0 + V_0 = V_1$，a small wave $\Psi\in W_0$. The Two-scale relation is $\phi(x)=\sum_k p_k\phi(2x-k)$，$\Psi(x)=\sum_k q_k\phi(2x-k)$，their Fourier transform is $\phi(\omega)=P(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，$\Psi(\omega)=Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，$z=e^{-i\omega/2}$，two-scale matrix is $M(z)=\begin{bmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{bmatrix}$. Our main result is $\{\Psi(x-k):k\in Z\}$ become the standard orthogonal basis of W_0 if and only if the two-scale matrix $M(z)$ is unitary matrix for almost $z\in T$.

Key words：orthogonal wavelets，two-scale matrixes，multiresolution analysis，structure

1 记号和引理

设 $\boldsymbol{Z}$ 是整数全体，$\boldsymbol{R}$ 是实数全体，$L^2(R)$为 $\boldsymbol{R}$ 上的勒贝格平方可积函数全体．C 为复数全体，$T=\{z:|z|=1\}\subset C$ 为单位圆周．

定义 1 $L^2(R)$ 的闭子空间序列 $\{V_j\}$ 称为一个多分辨分析，如果它满足：

（Ⅰ）$\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots$；

（Ⅱ）闭包 $\mathrm{clos}(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}V_j)=L^2(R)$；

（Ⅲ）$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty}V_j=\{0\}$；

（Ⅳ）$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$；

（Ⅴ）存在 $\phi(x)\in L^2(R)$ 使 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_0 的一个 Riesz 基；

（Ⅵ）$f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x+\frac{1}{2})\in V_j$；

称尺度函数 $\phi(x)\in V_0$ 生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_j\}$[1]．

已知尺度函数 $\phi(x)\in V_0\subset V_1$，令 $W_0\dot{+}V_0=V_1$，小波 $\Psi(x)\in W_0\subset V_1$，而 $\{\phi(2x-k):k\in Z\}$ 是 V_1 的 Riesz 基，因而存在序列 $\{p_k\}\in l^2$，$\{q_k\}\in l^2$ 使得

$$\begin{cases}\phi(x)=\sum_n p_n\phi(2x-n),\\ \Psi(x)=\sum_n q_n\phi(2x-n),\end{cases}\tag{1}$$

上述公式通常称为两尺度关系．

对(1)式施行 Fourier 变换，得到其等价形式：

$$\begin{cases}\phi(\omega)=P(z)\phi(\frac{\omega}{2}),\\ \Psi(\omega)=Q(z)\phi(\frac{\omega}{2}),z=e^{-i\omega/2},\end{cases}\tag{2}$$

这里，$P(z)=\frac{1}{2}\sum_n p_n z^n$，$Q(z)=\frac{1}{2}\sum_n q_n z^n$ 分别叫做序列 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 的符号．

作两尺度矩阵 $M(z)=\begin{pmatrix}P(z) & P(-z)\\ Q(z) & Q(-z)\end{pmatrix}$，

收稿日期：2004-12-20
修回日期：2005-02-17
作者简介：丁宣浩(1957-)，男，四川开江人，教授，主要研究算子理论与小波分析。
*国家自然科学基金(10361003)资助项目。

引入记号

$$B(z^2)=\sum_n|\phi(\omega+2n\pi)|^2,\ z=e^{-i\omega/2},$$

则 $B(z)=B(e^{-i\omega/2})=\sum_n|\phi(\frac{\omega}{2}+2n\pi)|^2$，

$$B(-z)=B(e^{-i(\omega+2\pi)/2})=\sum_n|\phi(\frac{\omega}{2}+\pi+2n\pi)|^2.$$

由于 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，因而存在常数 $0<A_1\leqslant B_1$ 使

$$A_1\leqslant\sum_n|\phi(\omega+2n\pi)|^2\leqslant B_1.$$

从而 $A_1\leqslant B(z^2),B(z),B(-z)\leqslant B_1$.

引理 1 设 $\phi(x)$ 是生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_k\}$ 的一个已知的尺度函数，$\Psi(x)\in W_0$，则 $\{\Psi(x-k):k\in Z\}$ 是 W_0 的一个 Riesz 基的充要条件是 $\{\phi(x-k),\Psi(x-k):k\in Z\}$ 成为 V_1 的 Riesz 基[1,2].

引理 2 设 $\phi(x)$ 是生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_j\}$ 的尺度函数，那么 $\{\phi(x-n),\Psi(x-n):n\in Z\}$ 是 V_1 的 Riesz 基当且仅当存在正常数 A_2 与 B_2 使在 T 上几乎处处有 $A_2\leqslant|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2\leqslant B_2$ 及两尺度矩阵 $M(z)$ 在 T 上几乎处处可逆.

2 正交小波的构造

虽然目前大家比较关心的小波理论是多个小波及高维小波的构造[4~6]，但一个一维小波的构造是最基本的. 而一维正交小波的构造在理论上并不是很清晰的. 如果已知 $\varphi(x)$ 是正交尺度函数，其两尺度方程是 $\phi(x)=\sum_n p_n\phi(2x-n)$ 和 $\phi(\omega)=P(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，

那么令 $\Psi(\omega)=\overline{zP(-z)}\phi(\frac{\omega}{2}),z=e^{-i\omega/2}$

或 $\Psi(x)=\sum_n(-1)^{n-1}\overline{P_{-n+1}}\phi(2x-n)$，

则 Ψ 就是正交小波.

本文给出在更一般的情况下正交小波的构造方法.

定理 1 设生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_j\}$ 的尺度函数 $\phi(x)$ 使 $\{\phi(x-k):k\in Z\}$ 成为 V_0 的标准正交基，则 $\{\phi(x-k),\Psi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_1 的标准正交基的充要条件是两尺度矩阵 $M(z)$ 在 T 上几乎处处是酉矩阵.

证明 *必要性* 设 $\{\phi(x-k),\Psi(x-k):k\in Z\}$ 是 V_1 的标准正交基，由引理 2 知 $\{\Psi(x-k):k\in Z\}$ 是 W_0 的标准正交基. 于是 $\sum_k|\phi(\omega+2k\pi)|^2=1$ 及 $\sum_k|\Psi(\omega+2k\pi)|^2=1$[1]. 由两尺度关系，$\phi(\omega)=P(z)\phi(\frac{\omega}{2})$，$\Psi(\omega)=Q(z)\phi(\frac{\omega}{2}),z=e^{\frac{-i\omega}{2}}$ 可以推出 $|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1$ 及 $|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2=1$.

又由 $\Psi\perp\phi(x-n),\forall n\in Z\Leftrightarrow\Psi\perp\phi(x-n)=\phi(\omega)e^{-in\omega}\Rightarrow\langle\Psi(\omega),\varphi(\omega)e^{-in\omega}\rangle=$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\omega)\overline{\phi(\omega)}e^{in\omega}d\omega=0$$

$$\Rightarrow0=\int_{-\infty}^{\infty}Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})\overline{P(z)}\,\overline{\phi(\frac{\omega}{2})}e^{in\omega}d\omega=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(z)\overline{P(z)}|\phi(\frac{\omega}{2})|^2e^{in\omega}d\omega=$$

$$\sum_k\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}Q(z)\overline{P(z)}|\phi(\frac{\omega}{2})|^2e^{in\omega}d\omega=$$

$$\sum_k\int_0^{2\pi}Q(e^{\frac{-i(\omega+2\pi k)}{2}})\overline{P(e^{\frac{-i(\omega+2\pi k)}{2}})}|\phi(\frac{\omega+2\pi k}{2})|^2e^{in\omega}d\omega$$

$$=\int_0^{2\pi}[Q(z)\overline{P(z)}\sum_k|\phi(\frac{\omega}{2}+2\pi k)|^2+$$

$$Q(-z)\overline{P(-z)}\sum_k|\phi(\frac{\omega}{2}+\pi+2\pi k)|^2]e^{in\omega}d\omega=$$

$$\int_0^{2\pi}[Q(e^{\frac{-i\omega}{2}})\overline{P(e^{\frac{-i\omega}{2}})}+Q(-e^{\frac{-i\omega}{2}})\overline{P(-e^{\frac{-i\omega}{2}})}]e^{in\omega}d\omega,$$

$\forall n\in Z\Rightarrow Q(z)\overline{P(z)}+Q(-z)\overline{P(-z)}=0,\ |z|=1$.

于是

$$M(z)\overline{M^T(z)}=\begin{pmatrix}P(z)&P(-z)\\Q(z)&Q(-z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{P(z)}&\overline{Q(z)}\\\overline{Q(z)}&\overline{Q(-z)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

其中，$\alpha_{11}=|P(z)|^2+|P(-z)|^2$；$\alpha_{12}=P(z)\overline{Q(z)}+P(-z)\overline{Q(-z)}$；$\alpha_{21}=Q(z)\overline{P(z)}+Q(-z)\overline{P(-z)}$；$\alpha_{22}=|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2$，故 $M(z)$ 几乎处处是酉矩阵.

充分性 若 $M(z)$ 是酉矩阵，

则 $M(z)\overline{M^T(z)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow|P(z)|^2+|P(-z)|^2=1,\ |Q(z)|^2+|Q(-z)|^2=1$，

及 $Q(z)\overline{P(z)}+Q(-z)\overline{P(-z)}=0$.

由引理 1 和引理 2 知 $\{\Psi(x-n):n\in Z\}$ 是 W_0 的 Riesz 基.

又 $\{\phi(x-n):n\in Z\}$ 是 V_0 的标准正交基，因而 $\sum_n|\phi(\omega+2n\pi)|^2=1$.

由两尺度关系，$\Psi(\omega)=Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})$

$$\Rightarrow\sum_n\Psi(\omega+2n\pi)|^2=|Q(z)|^2\sum_n|\phi(\frac{\omega}{2}+2n\pi)|^2+|Q(-z)|^2\sum_n|\phi(\frac{\omega}{2}+\pi+2n\pi)|^2=|Q(z)|^2+|Q(-z)|^2=1,$$

（下转第 176 页 Continue on page 176）

$J^{-}(x)$, 故 $x \in \omega(x)$ 和 $x \in \alpha(x)$, 即点 x 是Poisson稳定的. 第二种情况我们可类似的考虑, 这样就证明了 P 内的每一点是 Poisson 稳定的.

推论 1 设动力系统 (X, R, π) 为 Lyapunov 稳定, 若点 x 为正 Poisson 稳定的或负 Poisson 稳定的, 则 $\overline{\gamma(x)}$ 中的每一点为 Poisson 稳定的.

参考文献:

[1] Elaydi S, Farran H. Lipschitz stable dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 1985, 7(9): 729-738.

[2] Chin-Ku Chu, Kim Myung Sun, Lee Keon-Hee, et al. Lipschitz stability and lyapunov stability theory in dynamical systems[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 19(10): 901-909.

[3] Bhatia N P, Szego G. Stability theory of dynamical[M]. Berlin: Springer, 1970.

[4] Bhatia N P, Hajek O. Local Semi-dynamical systems[A]. Lecture Notes in Math[C]. Berlin: Springer, 1969. 90.

[5] Sibirsky K S. Introduction to topological dynamics[M]. English Transt. The Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1975.

(责任编辑: 韦廷宗　邓大玉)

(上接第 173 页 Continue from page 173)

故$\{\Psi(x-n): n \in Z\}$ 是规范正交族, 结合$\{\Psi(x-n): n \in Z\}$ 是 W_0 的Riesz基, 便知$\{\phi(x-n), \Psi(x-n): n \in Z\}$ 是 V_1 的标准正交基.

注　由定理 1 知道已知 $\phi(x)$ 是正交尺度函数, 要构造正交小波 Ψ, 关键是去寻求一个 $Q(z)$, 使得两尺度矩阵 $M(z) = \begin{bmatrix} P(z) & P(-z) \\ Q(z) & Q(-z) \end{bmatrix}$ 是一个酉矩阵, 从而行列式 $\det M(z)$ 的绝对值为 1.

可设 $\alpha(z) = \dfrac{1}{\det M(z)}$, 则 $|\alpha(z)| = 1$. 又 $M^T(z)^{-1} = \overline{M(z)}$, 推出 $\alpha(z)Q(z) = -P(-z)$, 即有 $Q(z) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)$.

注意到 $\det M(z) = P(z)Q(-z) - P(-z)Q(z)$, 因此 $\det M(-z) = -\det M(z)$, 从而 $\alpha(-z) =$
$-\alpha(z)$, $Q(-z) = \bar{\alpha}(z)P(z)$.

这样 $M(z) = \begin{bmatrix} P(z) & P(-z) \\ -\bar{\alpha}(z)P(-z) & \bar{\alpha}(z)P(z) \end{bmatrix}$,

$\overline{M^T(z)} = \begin{bmatrix} P(z) & -\alpha(z)P(-z) \\ P(-z) & \alpha(z)P(z) \end{bmatrix}$,

验证　$M(z)\overline{M^T(z)} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

其中, $\beta_{11} = |P(z)|^2 + |P(-z)|^2$; $\beta_{12} = -\bar{\alpha}(z)P(z)P(-z) + \bar{\alpha}(z)P(z)P(-z)$; $\beta_{21} = -\alpha(z)P(z)P(-z) + \alpha(z)P(z)P(-z)$; $\beta_{22} = |P(z)|^2 + |P(-z)|^2$,

故 $M(z)$ 是酉矩阵. 所以, 只要 $\alpha(z)$ 满足:
$|\alpha(z)| = 1$ 与 $\alpha(-z) = -\alpha(z)$.

令 $Q(z) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)$,

则由 $\Psi(\omega) = Q(z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 定义的 $\Psi(x)$ 就是一个正交小波.

特别地, 取 $\alpha(z) = -\bar{z}$, $Q(z) = zP(-z)$, $\Psi(\omega) = zP(-z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 这就是通常的取法, 则 $\Psi(x)$ 是正交小波. 当然我们还可以令 $\alpha(z) = \pm\bar{z}^{2k+1}$ 或 $\alpha(z) = \pm z^{2k+1}$, 根据定理 1, 由 $\Psi(\omega) = -\bar{\alpha}(z)P(-z)\phi(\frac{\omega}{2})$ 定义的 $\Psi(x)$ 也是一个正交小波.

参考文献:

[1] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.

[2] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995.

[3] 冯象初, 甘小冰, 宋国香. 数值泛函与小波理论[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.

[4] Un Y, Tang L. Fast method compute tensor product 2-D wavelet transforms[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 99-104.

[5] Shi Z, Song G, Multi-frequency biorthogonal wavelets generated bu a finite number of functions[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 118-125.

[6] Tang Y Y, Yang J, Zhang W. A class of semi-orthogonal wavelet packets[A]. In: Proceedings of the Third International Conference on Wavelet Analysis and Its Applications[C]. Chongqing: Logistical Engi Univ of PLA, 2003. 144-149.

(责任编辑: 黎贞崇)