DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.009
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(3):187~190

有流量附加约束动态交通网络平衡的变分不等式表示

Variational Inequality Expression for Dynamic Traffic Network Equilibrium with Path Flow Additional Constraints

吴晓层[1,2], 范炳全[1]

Wu Xiaoceng[1,2], Fan Bingquan[1]

(1.上海理工大学管理学院,上海 200093;2.广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(1. Coll. of Mana., Univ. of Shanghai for Sci. and Tech., Shanghai, 200093, China; 2. Coll. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:为了研究有流量附加约束的动态交通网络平衡问题,将附加约束等价地当作路径的新增阻抗,得到了基于有流量附加约束条件下的 Wardrop 用户平衡的变分不等式表示,并提供了计算这种平衡配流的另一种方法.该方法由于考虑了路径容量约束,使得这种变分不等式表示更接近现实中有路径流量限制的情形.

关键词:动态交通 网络平衡 流量附加约束 变分不等式 Wardrop 用户平衡

中图法分类号:U491.1+12;O176 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2005)03-0187-04

Abstract: This paper examines the problem of dynamic traffic network equilibrium with path flow additional constraints. This is an important part of the advanced transport network researches. We formulate the additional constraints as new adding road costs and present variational inequalities expression for the Wardrop user equilibrium. According to our studies, one can develop a new equilibrium algorithm for the traffic flows. Moreover, the more realistic capacity constraints are considered in the paper.

Key words: dynamic transportation, network equilibrium, flow additional constraints, variational inequality, Wardrop user equilibrium

在研究高速公路与城市道路交通时,交通分配模型是预测实时交通流的有力工具,而交通流的动态特性需要用动态交通分配模型才能得到实时的交通信息.这一问题的实质就是动态网络平衡问题.1993年,Friesz 等[1]在前人研究的基础上,引入变分不等式方法来研究动态交通网络平衡问题,将平衡态下驾驶员对路径的选择行为(即所谓的 Wardrop 原理)表示成一个变分不等式问题.此后,许多学者如 A. Nagurney 和 J. H. Wu 等人在用变分不等式研究动态交通网络问题上做出了许多富有成效的工作[2~4].但这些工作都是建立在路径流量无附加约束的基础之上,而在现实的交通管控中,交通管理部门有时需要对某些路段进行流量的额外限制,这就是有流量附加约束限制的交通网络平衡问题.Ran Bin[5,6]研究了这种平衡问题,他的研究方法是将附加的约束融入到路径(路段)的可行集里.这种方法没能反映出约束对路径(路段)阻抗的影响,在应用上有诸多不便.本文的研究则是将附加约束看成是路径(路段)阻抗的变化,并给出了 Wardrop 用户平衡的变分不等式表示.同时,在本文研究的交通网络中,考虑了路径容量约束,因而所研究的情形更接近现实.

1 动态交通网络的描述

交通网络用一个三元组 (N, A, W) 来描述,其中 $N=\{P_1, P_2, \cdots, P_p\}$ 表示节点集,$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\subset N\times N$ 称为路段(或弧)集,$W=\{w_1, w_2, \cdots, w_l\}\subset 2^A$ 称为O/D对集.$P_i\in N$ 表示点P_i是交通流产生或交通流到达的点,$a_i=(P_1, P_2)\in A$ 表示a_i是路段或弧,其起点是 $P_1\in N$,终点是 $P_2\in N$.$w_j=[P_1, P_2]\in W$ 表示w_j是O/D对,它是由起点是 $P_1\in N$ 和终点是$P_2\in N$ 的有序节点列组成的集合,w_j 中的元素称为连接 O/D 对w_j 的路径,它是由起点为 $P_1\in N$和终点为$P_2\in N$的有序点列构成的.记 $P=\{r:$

收稿日期:2004-11-10

作者简介:吴晓层(1967-),男,广西三江县人,讲师,主要从事交通系统工程研究。

$r \in w_j, j = 1, 2, \cdots, l\}$，它表示网络中的路径集，$m = \| P \|$ 表示路径总数。

$F(t) \in L^p([0, T], R_+^m)$，$f(t) \in L^p([0, T], R_+^n)$，$p > 1$ 分别称为路径流向量（函数）和路段流向量（函数），$[0, T]$ 为问题所研究的时间区间。记

$$F(t) = (F_1(t), F_2(t), \cdots, F_m(t))^T,$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^T,$$

这里"T"表示转秩。

一个可行的交通流必须满足如下 2 个条件：

(1) 路径容量约束：

$$\lambda(t) \leqslant F(t) \leqslant \mu(t), \text{a.e. 于}[0, T], \quad (1.1)$$

其中，$\lambda(t), \mu(t) \in L^p([0, T], R_+^m)$ 是已知的函数。在许多文献里，容量约束没有被考虑，对路径流量函数的约束仅仅是非负约束：

$$F(t) \geqslant 0, t \in [0, T], \quad (1.2)$$

很显然，(1.1) 式包含了 (1.2) 式。

(2) 交通需求约束：

$$\Phi F(t) = g(t), \text{a.e. 于}[0, T], \quad (1.3)$$

其中，$\Phi = (\varphi_{jr})_{l \times m}$ 是路段-路径之间的关联矩阵，即

$$\varphi_{jr} = \begin{cases} 1, & r \in w_j, \\ 0, & r \notin w_j. \end{cases}$$

$g(t) = (g_1(t), \cdots, g_l(t))^T \in L^p([0, T], R_+^m)$ 是已知的，它表示时刻 t 的交通需求，$g_i(t)$ 表示时刻 t O/D 对 i 单位时间的交通产生率。

本文称满足 (1.3) 和 (1.1) 或 (1.2) 式的 $F(t) \in L^p([0, T], R_+^m)$ 为可行流量。这样，带有路径容量约束的可行流量集为集合：

$$K = \{F \in L^p([0, T], R_+^m) : \lambda(t) \leqslant F(t) \leqslant \mu(t), \Phi F(t) = g(t), \text{a.e. 于}[0, T]\}, \quad (1.4)$$

而没有路径容量约束的可行流量集可表示为：

$$K_1 = \{F \in L^p([0, T], R_+^m) : F(t) \geqslant 0, \Phi F(t) = g(t), \text{a.e. 于}[0, T]\}, \quad (1.5)$$

显然，当

$$\Phi\lambda(t) \leqslant g(t) \leqslant \Phi\mu(t), \text{a.e. 于}[0, T] \quad (1.6)$$

满足时，集合 K 非空。在本文总假设 K 和 K_1 的内部 int K 和 int K_1 非空。

易证，在上述假设下，集合 K 和 K_1 是有界的闭凸集。

称映照

$$C: K(\text{或} K_1) \mapsto L^q([0, T], R_+^m)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

为路径阻抗函数，其中 $L^q([0, T], R_+^m)$ 为函数空间 $L^p([0, T], R_+^m)$ 的对偶空间。记 $C(F)(t)$ 为 $(C_1(F)(t), \cdots, C_m(F)(t))^T$，其中 $C_i(F)(t)$ 路径 i 在时刻 t 的阻抗，$F \in K$ 或 K_1。

为引入平衡概念，在乘积空间 $L^q([0, T], R_+^m) \times L^p([0, T], R_+^m)$ 上，本文定义：

$$\langle A, F \rangle = \int_0^T (A(t), F(t)) \mathrm{d}t, A(t) \in L^p([0, T], R_+^m), F(t) \in L^p([0, T], R_+^m),$$

其中 $(.,.)$ 为函数空间 $L^p([0, T], R_+^m)$ 及其对偶空间的对偶积。显然，$\langle .,. \rangle$ 是一个标准的双线性型。

2 无流量附加约束的动态交通网络平衡

所谓 Wardrop 用户平衡是指，在平衡状态下，没有司机认为能通过单方面改变行驶路径可以达到减少自己行驶阻抗的目的。下面分别给出有容量约束和无容量约束情形的数学表达。

定义 2.1 称 $F^* \in L^p([0, T], R_+^m)$ 为具有路径容量约束的 Wardrop 用户平衡配流当且仅当 $F^* \in K$ 且对任意 O/D 对 w_j 和 $r, s \in w_j (j = 1, 2, \cdots, l)$，有

$$C_r(F^*)(t) < C_s(F^*)(t) \Rightarrow F_r^*(t) = \mu_r(t), F_s^*(t) = \lambda_s(t). \text{a.e. 于}[0, T]. \quad (2.1)$$

定义 2.2 称 $F^* \in L^p([0, t], R_+^m)$ 为无路径容量约束的 Wardrop 用户平衡配流当且仅当 $F^* \in K$ 且对任意 O/D 对 w_j 和 $r \in w_j (j = 1, 2, \cdots, l)$，有

$$C_r(F^*)(t) \begin{cases} = U_j(t), \text{如果 } F_r^*(t) \neq 0, \\ > U_j(t), \text{否则} \end{cases} \quad (2.2)$$

其中，$U_j(t) = \min(C_r(F^*)(t), r \in w_j, \text{a.e. 于}[0, T], j = 1, 2, \cdots, l)$。

于是，得到定理 2.1。

定理 2.1 (1) F^* 是满足于定义 2.1 的用户平衡配流当且仅当它满足变分不等式

$$F^* \in K \langle C(F^*), F - F^* \rangle \geqslant 0, \forall F \in K. \quad (2.3)$$

(2) F^* 是满足于定义 2.1 的用户平衡配流当且仅当它满足变分不等式

$$F^* \in K_1 \langle C(F^*), F - F^* \rangle \geqslant 0, \forall F \in K_1. \quad (2.4)$$

定义 2.2 正是文献[1 ~ 6] 所研究的情形，故定理 2.1(2) 的证明可直接从这些文献中得到，定理 2.1(1) 的证明可以仿照这些证明。

定理 2.2 揭示出 (2.1) 式也有如 (2.2) 式的表达形式，这事实上就是有路径容量约束的 all-or-nothing 算法的基础。

定理 2.2 $F^* \in K$ 是满足 (2.1) 式的 Wardrop 用户平衡配流当且仅当它满足以下条件：对任意 $w \in W$，存在函数 $h_w : [0, T] \to R$，对任意 $r \in w$，在 $[0, T]$ 上几乎处处有

$$C_r(F^*)(t) \leqslant h_w(t) \Rightarrow F_r^*(t) = \mu_r(t), \quad (2.5)$$

$$C_r(F^*)(t) > h_w(t) \Rightarrow F_r^*(t) = \lambda_r(t). \quad (2.6)$$

证明 充分条件显然，只证明必要条件。

设 F^* 是满足(2.1)式的 Wardrop 用户平衡配流,令 $w\in W$ 和

$A(t)=\{r\in w: F_r^*(t)<\mu_r(t)$, a.e. 于$[0,T]\}$,

$B(t)=\{s\in w: F_s^*(t)>\lambda_s(t)$, a.e. 于$[0,T]\}$.

则 $C_r(t)\geqslant C_s(t)$, a.e.于$[0,T]$,

对所有的 $r\in A(t)$, $s\in B(t)$ 成立.于是有

$a_w(t)=\inf_{r\in A(t)} C_r(t)\geqslant b_w(t)=\sup_{s\in B(t)} C_s(t)$, a.e. 于$[0,T]$.

令$h_w(t)\in[b_w(t),a_w(t)]$,从而对任意 $r\in w$,如果几乎处处在$[0,T]$上有$C_r(t)<h_w(t)$成立,则 $r\notin A(t)$.这意味着 $F_r^*(t)=\mu_r(t)$, a.e.于$[0,T]$.仿此,由 $C_r(t)>h_w(t)$得

$F_r^*(t)=\lambda_r(t)$, a.e.于$[0,T]$.

3 有流量附加约束的动态交通网络平衡

在现实中,有时根据某种情况的需要,对某些路段的交通流进行额外的限制.这样,原来的平衡条件就改变了.这就是有流量附加约束的动态交通平衡网络问题.研究这类问题的文献通常将附加约束加入到可行集里,于是就等同没有附加约束的网络一样处理,这样反映不出附加的约束对网络的影响,在应用上很不直观.为此,对附加约束对网络的影响进行变分不等式的表达.

假设附加的路径流量约束可表示为 $F\in D$,其中 F 为路径流量函数,$D\subset L^q([0,T],R_+^m)$为凸集,且 $\mathrm{int}\,K\cap\mathrm{int}\,D\neq\varnothing$.

于是,对应于定义2.1和定义2.2,有流量附加约束的Wardrop用户平衡配流 $F^*\in L^p([0,T],R_+^m)$定义为:$F^*\in K\cap D$,对任意 O/D 对$w_j(j=1,2,\cdots,l)$,和任意 r, $s\in w_j$,在$[0,T]$上几乎处处有

$$C_r(F^*)(t)<C_s(F^*)(t)\Rightarrow F_r^*(t)=\mu_r(t),\quad F_s^*(t)=\lambda_s(t) \tag{3.1}$$

成立.对应于定义 2.2,有流量附加约束的 Wardrop 用户平衡配流 $F^*\in L^p([0,T],L^q)$定义为:$F^*\in K_1\cap D$,对任意 O/D 对$w_j(j=1,2,\cdots,l)$,和任意 $r,s\in w_j$,在$[0,T]$上几乎处处有

$$C_r(F^*)(t)\begin{cases}=U_j(t), & \text{如果 } F_r^*(t)\neq 0,\\ >U_j(t), & \text{否则}\end{cases} \tag{3.2}$$

成立.

这样,在有流量附加约束的情况下,对应于定理2.1中的(2.3)式和(2.4)式分别为:

$$F^*\in K\cap D,\ \text{且}\langle C(F^*),F^*-F\rangle\geqslant 0,\ \forall F\in K\cap D \tag{3.3}$$

和 $$F^*\in K_1\cap D,\ \text{且}\langle C(F^*),F^*-F\rangle\geqslant 0,\ \forall F\in K_1\cap D. \tag{3.4}$$

但(3.3)式和(3.4)式不能刻画出附加约束对流量产生的真正影响,下面定理3.1揭示了这一影响.

为引出定理3.1,先给出引理3.1.

引理3.1 集合K和D的定义如前所述,$\mathrm{int}\,K\cap\mathrm{int}\,D\neq\varnothing$,如果存在 $\alpha>0$和 $S\in L^q([0,T],R_+^m)$满足$\langle S,F\rangle\leqslant\alpha$, $\forall F\in D$ 和$\langle S,F\rangle\geqslant\alpha$, $\forall F\in K$,则 $S=0$.

证明 对任意 $F\in\mathrm{int}\,K\cap\mathrm{int}\,D$,有$\langle S,F\rangle=\alpha$.从而存在一个数 $\varepsilon_0>0$ 和函数 $F_0\in\mathrm{int}\,K\cap\mathrm{int}\,D$,使得对任意 $\lambda\in(0,1)$,有:

$$F_0+\lambda\varepsilon_0 e_i\in O(F_0,\varepsilon_0)\subset\mathrm{int}\,K\cap\mathrm{int}\,D$$

成立.其中 $e_i\in L^p([0,T],R_+^m)$, $e_i(t)\equiv(0,\cdots,1,\cdots,0)^T\in R^m$ 恒为单位向量,$i=1,\cdots,m$.于是,

$$0=\alpha-\alpha=\langle S,F_0+\lambda\varepsilon_0 e_i\rangle-\langle S,F_0\rangle=\langle S,\lambda\varepsilon_0 e_i\rangle.$$

即$\langle S,\lambda\varepsilon_0 e_i\rangle=0$, $\forall\lambda\in(0,1)$.令 $\lambda\to 1$,得 $S=0$.

定理3.1 F^* 是满足(3.3)式的流量当且仅当存在 $S\in L^q([0,T],R_+^m)$使得

$$\langle S,F-F^*\rangle\leqslant 0,\ \forall F\in D, \tag{3.5}$$

$$\langle C(F^*)+S,F-F^*\rangle\geqslant 0,\ \forall F\in K \tag{3.6}$$

成立.

证明 "$\Leftarrow$".如果(3.5)和(3.6)式得到满足,则有

$$\langle C(F^*),F-F^*\rangle\geqslant\langle C(F^*)+S,F-F^*\rangle\geqslant 0,\ \forall F\in K\cap D.$$

从而,F^* 是满足(3.3)式的网络平衡流.

"$\Rightarrow$".设 F^* 满足(3.3)式.本文定义如下2个集合:

$A=\{(F,r)\in D\times R: r<0\}$,

$B=\{(F,r)\in K\times R:\langle C(F^*),F-F^*\rangle\leqslant r\}$.

由(3.3)式知,A 和B 是2个不相交的$L^p([0,T],R_+^m)\times R$ 上的非空凸子集.而且,由$\mathrm{int}\,D\neq\varnothing$知$\mathrm{int}\,A\neq\varnothing$.于是,由凸集分离定理得,存在$(S,k)\in L^p([0,T],R_+^m)\times R$ 和$\alpha\in R$,且$(S,k)\neq(0,0)$,使得

$$\langle S,F\rangle+kr\leqslant\alpha,\ \forall(F,r)\in A, \tag{3.7}$$

$$\langle S,F\rangle+kr\geqslant\alpha,\ \forall(F,r)\in B \tag{3.8}$$

成立.令 $F_1\in K\cap\mathrm{int}\,D$, $(F_1,r_1)\in A$ 和$(F_1,r_2)\in B$,由(3.7)和(3.8)式得:

$$\langle S,F_1\rangle+kr_1\leqslant\alpha, \tag{3.9}$$

$$\langle S,F_1\rangle+kr_2\geqslant\alpha. \tag{3.10}$$

因为 $r_1<0$, $r_2\geqslant 0$,于是得到 $k\geqslant 0$.

往证 $k>0$.假设 $k=0$,则由(3.7)和(3.8)式,有$\langle S,F\rangle\leqslant\alpha$, $\forall F\in D$,和$\langle S,F\rangle\geqslant\alpha$, $\forall F\in K$.由引理得 $S=0$,这与$(S,k)\neq(0,0)$矛盾,从而 $k>0$.

不失一般性,令 $k=1$,这样不会影响(3.7)~(3.10)式的正确性,只是 S 和α 须作相应地调整.在

(3.9) 式中, 令 $r_1 \to 0$, 得

$$\langle S, F\rangle \leqslant \alpha,\ \forall F \in D, \tag{3.11}$$

在(3.8)式中, 取 $r = \langle C(F^*), F - F^*\rangle$ 得:

$$\langle S, F\rangle + \langle C(F^*), F - F^*\rangle \geqslant \alpha,\ \forall F \in K, \tag{3.12}$$

取 $F = F^*$, 得 $\langle S, F^*\rangle = \alpha$. 将 α 代入(3.11)和(3.12)式得到(3.5)和(3.6)式.

定理**3.2** 在定理**3**.1中将集K换为集K_1, 结论仍然成立.

证明仿定理3.1的证明即可.

定理3.1和定理3.2刻画了流量附加约束对网络的影响: 设路段 a 有流量附加约束, 这约束可以等同地看成道路的使用者在时刻 t 经过路段a额外增加的阻抗为 $s_a(t)$, 例如: $s_a(t)$ 可以理解为为了防止路段 a 出现过度拥挤情况道路管理者额外附加的单位费用, 这样, 路段 a 的阻抗不再是c_a 而是$c_a + s_a$. 从而, 在平衡状态下, 路径阻抗函数不再是 $C(F^*)$ 而是变成了 $C(F^*) = C(F^*) + S(F^*)$, 其中 $S = (S_1, \cdots, S_m)^T \in L^q([0, T], R^m_+)$, S_j 为由于路径j 上的路段有附加约束而引起的对路径的附加约束, 它满足(3.5)式.

相应于 all-or-nothing 的配流算法, 对应于定理2.2, 有附加流量约束情形为:

定理 **3.3** $F^* \in K$ 是有流量附加约束的 Wardrop 用户平衡配流, 则对任意 $w \in W$, 存在函数 $\hat{h}_w: [0, T] \to R$, 对任意 $r \in w$, 在$[0, T]$ 上几乎处处有

$$C_r(F^*)(t) \leqslant \hat{h}_w(t) \Rightarrow F_r^*(t) = \mu_r(t), \tag{3.13}$$

$$C_r(F^*)(t) > \hat{h}_w(t) \Rightarrow F_r^*(t) = \lambda_r(t). \tag{3.14}$$

参考文献:

[1] Friesz T L, Bernstein D, et al. A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem [J]. Operations Research, 1993, 41(1): 179-191.

[2] Wu J H. Dynamic network equilibrium problem formulated as an infinite dimensional variaional inequality problem [A]. Second EURO Working Group Meating on Urban Traffic and Transportation[C], Paris, France, 1993.

[3] Dafermos S. Traffic equilibria and variational inequalities[J]. Transportation Science, 1980, 14: 42-54.

[4] Zhang D, Nagurney A, Wu J H. On the equivalence between stationary link flow patterns and traffic network equilibrium[J]. Transportation Research (B), 2001, 135: 731-748.

[5] Ran B, Rouphail N M, et al. Toward a class of link travel time functions for dynamic assignment models on signalized networks[J]. Transportation Research (B), 1997, 31(4): 277-290.

[6] Ran B, Boyce D E. Modeling Dynamic Transportation Networks(second edition)[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[7] Noor M A, Rassias T M. Projection methods for monotone variational inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 237: 405-412.

[8] Noor M A. A modified projection method for monotone variational inequalities[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12: 83-87.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 186 页 Continue from page 186)

[3] 陈 挺. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987.

[4] 徐南荣, 仲伟俊. 科学决策理论与方法[M]. 南京: 东南大学出版社, 1996. 2-10.

[5] 吴 江, 黄登仕. 多属性决策中区间数偏好信息的一致化方法[J]. 系统工程理论方法应用, 2003, 12(4): 359-362.

[6] Yook K. The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: a practical approac[J]. Journal of the Operational Research Society, 1989, 40: 681-686.

[7] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 96: 379-386.

[8] Kyung S L, Kyung S P, Yun S E, et al. Extended methods for identifying dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise information[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134: 379-386.

[9] 樊治平, 张 权. 一种不确定性多属性决策模型的改进[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(12): 42-47.

[10] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2001, 16(增刊): 818-821.

[11] 达庆利, 徐泽水. 不确定多属性决策的单目标最优化模型[J]. 系统工程学报, 2002, 17(1): 50-55.

[12] 徐泽水, 达庆利. 区间型多属性决策的一种新方法[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2003, 33(4): 498-501.

[13] 徐泽水, 孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 35-39.

[14] 徐泽水. 求解不确定多属性决策问题的一种新方法[J]. 系统工程学报, 2002, 17(2): 177-181.

[15] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 155-167.

[16] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18: 105-118.

[17] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 117-131.

[18] 樊治平, 李洪燕. 基于 Fuzzy 偏好关系的一种排序方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 1999, 20(6): 651-653.

[19] 刘宝碇, 赵瑞清, 王 纲. 不确定规划及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

(责任编辑: 黎贞崇)